Локализация

Помимо полей вычетов, в коммутативной алгебре появляются «большие» поля – поля частных.

Определение 1. Пусть A – кольцо без делителей нуля. *Полем частным A* называется множество классов эквивалентности дробей вида $a/b, a, b \in A, b \neq 0$, по отношению эквивалентности $a/b \sim c/d \iff ad - bc = 0$. Обозначение: $\mathrm{Frac}(A)$

На $\mathrm{Frac}(A)$ вводятся сложение и умножение по обычным формулам сложения и умножения дробей, они превращают $\mathrm{Frac}(A)$ в поле. Имеется вложение кольца A в $\mathrm{Frac}(A)$: $a \mapsto a/1$.

Пример 2. $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$, $\mathrm{Frac}(\mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]) = \mathsf{k}(x_1, \dots, x_n)$ – рациональные функции от n переменных.

Пример 3. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ – неприводимое алгебраическое многообразие. Тогда поле частных $\mathrm{Frac}(\mathsf{k}[X])$ обозначается $\mathsf{k}(X)$ и называется *полем рациональных функций* на X.

Заметим, что рациональные функции – это не функции на X в строгом смысле слова, т.к. они определены не во всех точках X.

Пусть $f\colon A \to B$ – гомоморфизм колец. Если f инъективен, можно продолжить его до гомоморфизма полей: $\widetilde{f}\colon \mathrm{Frac}(A) \to \mathrm{Frac}(B)$ по правилу $\widetilde{f}(a/b) = f(a)/f(b)$. Если же f имеет ядро, то знаменатель $f(b)$ может быть нулём и отображение построить не удастся.

Любое регулярное отображение неприводимых многообразий $\phi\colon X \to Y$ определяет гомоморфизм алгебр $\phi^*\colon \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$. Если ϕ имеет плотный образ, то ϕ^* – вложение и его можно продолжить до гомоморфизма полей рациональных функций: $\mathsf{k}(Y) \to \mathsf{k}(X)$. Однако не любой гомоморфизм полей задаёт регулярное отображение многообразий, оно может оказаться всего лишь рациональным. Но оно будет регулярным на некотором открытом подмножестве в X.

Определение 4. Пусть X – неприводимое алгебраическое многообразие, $P \in X$ – точка, $f \in \mathsf{k}(X)$ – рациональная функция. Говорят, что f *регулярна в P*, если найдутся $p, q \in \mathsf{k}[X]$ такие, что $f = p/q$ и $q(P) \neq 0$. Если $V \subset X$ – открытое множество, скажем, что f *регулярна на V*, если f регулярна во всех точках $P \in V$. Множество регулярных на V функций обозначим $\mathsf{k}[V]$.

Очевидно, $\mathsf{k}[V]$ – кольцо, оно вложено в $\mathsf{k}(X)$. Для $V = X$ (и не только) естественно спросить, как данное выше определение регулярной функции на X согласуется с обычным (ограничение многочлена на X). Конечно, они согласованы, но мы этого доказывать не будем.

Предложение 5. *Пусть поле k алгебраически замкнуто, а X – неприводимое алгебраическое многообразие над k. Тогда рациональная функция, регулярная на X в смысле определения 4, регулярна в обычном смысле, т.е. является ограничением многочлена.*

По аналогии можно говорить о регулярных в точке функциях в случае произвольного кольца.

Определение 6. Пусть A – кольцо без делителей нуля, $\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал, $x \in \mathrm{Spec}(A)$ – соответствующая точка. Говорят, что рациональная функция $f \in \mathrm{Frac}(A)$ *регулярна в x*, если найдутся $a, b \in A$ такие, что $f = a/b$ и $b(x) \neq 0$, т.е. $b \notin \mathfrak{p}$. Регулярные в точке спектра функции также образуют кольцо.

В геометрической ситуации это определение соответствует регулярности функций в точках многообразия X (замкнутых точках спектра), а также регулярности вдоль подмногообразия. А именно, если $Z \subset X$ – неприводимое подмногообразие, и $\mathfrak{p} \subset \mathsf{k}[X]$ – соответствующий идеал, то можно говорить о функциях из $\mathsf{k}(X)$, регулярных в точке $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathsf{k}[X])$ (т.е. регулярных вдоль Z). Заметим, что регулярная вдоль Z функция не обязательно регулярна во всех точках Z.

Пример 7. Пусть $X = \mathbb{A}^2$, тогда $\mathsf{k}(X) = \mathsf{k}(x,y)$. Положим $f = x/y \in \mathsf{k}(X)$. Тогда f регулярна в точке $(a,b) \in \mathbb{A}^2 \iff b \neq 0$. Для простого идеала $\mathfrak{p}_1 = (x)$ функция f регулярна в $\mathfrak{p}_1$ (то есть, регулярна вдоль прямой $x = 0$) т.к. $y \notin (x)$. При этом f не регулярна в точке $(0,0)$, лежащей на прямой $x = 0$. А для $\mathfrak{p}_2 = (y)$ f не регулярна в $\mathfrak{p}_2$.

Таким образом, между кольцом и его полем частных есть много промежуточных колец, которые получаются, когда обращают не все элементы кольца, а только их часть. Например, между $\mathsf{k}[X]$ и $\mathsf{k}(X)$ лежат кольца функций, регулярных на подмножествах $V \subset X$ или вдоль подмногообразий $Z \subset X$. Такие кольца мы сегодня и изучим.

Определение 8. *Мультипликативной системой* в кольце A называется подмножество $S \subset A$, которое мультипликативно замкнуто, содержит 1 и не содержит 0.

Пример 9.

1. Если A не имеет делителей нуля, то $S = A \setminus \{0\}$ – мультипликативная система;
2. множество элементов, не являющихся делителями нуля, – мультипликативная система;
3. множество обратимых элементов – мультипликативная система;
4. множество нечётных целых чисел – мультипликативная система в $\mathbb{Z}$;
5. если $a \in A$ не нильпотентен, то $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – мультипликативная система в $\mathbb{A}$;
6. если $I \subset A$ – идеал, то $A \setminus I$ – мультипликативная система в $A \iff I$ прост;
7. если $I \subset A$ – идеал, то $1 + I = \{1 + i \mid i \in I\}$ – мультипликативная система в A.

Локализация кольца по мультипликативной системе – это формальное обращение всех её элементов.

Определение 10. *Локализацией* кольца A по мультипликативной системе S называется множество классов эквивалентности дробей вида a/s, где $a \in A, s \in S$, по отношению эквивалентности $a/s \sim a'/s'$, если найдётся такое $t \in S$, что $(as' - a's)t = 0$. Обозначение: $S^{-1}A$ или $A[S^{-1}]$.

Замечание 11. Обычное определение эквивалентности дробей: $a/s \sim a'/s'$, если $as' - a's = 0$ годится только для колец без делителей нуля. В кольцах с делителями нуля, вообще говоря, такое отношение не будет отношением эквивалентности.

Предложение 12. *Формулы $a/s + a'/s' = (as' + a's)/(ss')$, $a/s \cdot a'/s' = (aa')/(ss')$ корректно задают сложение и умножение на локализации кольца, превращая его в кольцо.*

Доказательство. Нехитрая проверка. $\square$

Пример 13. Вычислим локализации в приведённых выше примерах.

1. Для $S = A \setminus \{0\}$, очевидно, $S^{-1}A = \mathrm{Frac}(A)$;

2. для S – множества не делителей нуля получаем т.н. «полное кольцо частных»;

3. для S – множества обратимых элементов имеем $S^{-1}A = A$.

4. для S – множества нечётных целых чисел имеем $S^{-1}A = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \text{ нечётное}\}$.

5. Если $a \in A$ не нильпотентен и $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, локализация $S^{-1}A$ обозначается A_a или $A[a^{-1}]$ и называется *локализацией по элементу.* В этом случае $S^{-1}A \cong A[x]/(ax-1)$. В случае, когда X – неприводимое алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем, а $a \in \mathsf{k}[X]$ – регулярная функция, $\mathsf{k}[X]_a$ изоморфно кольцу $\mathsf{k}[D_a]$, где $D_a \subset X$ – главное открытое множество. При этом D_a – тоже алгебраическое многообразие.

6. Если $\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал и $S = A \setminus \mathfrak{p}$, то $S^{-1}A$ обозначается $A_\mathfrak{p}$ и называется *локализацией по простому идеалу.* Если X – неприводимое алгебраическое многообразие, а $\mathfrak{p} \subset \mathsf{k}[X]$ – простой идеал подмногообразия $Z \subset X$, то $\mathsf{k}[X]_\mathfrak{p}$ – это кольцо регулярных функций вдоль Z.

Задача 1. Пусть $a = (1, 0) \in A \times B$. Опишите локализацию $(A \times B)_a$.

Покажем, что $A_a \cong A[x]/(ax-1)$. Сначала построим гомоморфизм $A[x]/(ax-1) \to A_a$. Для этого определим гомоморфизм $\phi\colon A[x] \to A_a$ равенством $\phi(p) = p(1/a)$. Он равен нулю на $(ax-1)$: имеем $\phi(ax-1) = a \cdot \frac{1}{a} - 1 = 0$, поэтому ϕ пропускается через фактор $A[x]/(ax-1)$.

Для того, чтобы построить обратный гомоморфизм $A_a \to A[x]/(ax-1)$, понадобится следующее

Предложение 14 (Универсальное свойство)**.** *Имеется естественная биекция между множествами гомоморфизмов колец*

$$\mathrm{Hom}(S^{-1}A, B) \cong \{\phi \in \mathrm{Hom}(A, B) \mid \forall s \in S\ \phi(s)\ \textit{обратим}\}.$$

Доказательство. Пусть $\phi\colon S^{-1}A \to B$ – гомоморфизм. Определим гомоморфизм $\psi\colon A \to B$ равенством $\psi(a) = \phi(a/1)$. При этом образы $\psi(s)$ обратимы: обратным к $\psi(s) = \phi(s/1)$ будет $\phi(1/s)$.

Пусть $\psi\colon A \to B$ – гомоморфизм и все образы $\psi(s)$ обратимы. Определим гомоморфизм $\phi\colon S^{-1}A \to B$ равенством $\phi(a/s) = \psi(a)/\psi(s)$. Проверим корректность: если $a/s \sim a'/s'$, то при некотором $t \in S$ выполнено $t(as' - a's) = 0$. Значит, $\psi(t)(\psi(a)\psi(s') - \psi(a')\psi(s)) = 0$, и так как $\psi(t)$ обратим, $\psi(a)\psi(s') - \psi(a')\psi(s) = 0$ и $\psi(a)/\psi(s) - \psi(a')/\psi(s') = 0$. Очевидно, что ϕ будет гомоморфизмом, и что построенные соответствия между ϕ и ψ взаимно обратны. $\square$

Определение 15. Мультипликативная система $S \subset A$ называется *насыщенной*, если $s_1 s_2 \in S \iff s_1, s_2 \in S$. *Насыщение* данной мультипликативной системы S – это множество таких $x \in A$, что при некотором $y \in A$ имеем $xy \in S$.

Задача 2. Какие из систем в примере 9 насыщенны?

Задача 3. Пусть $S \subset A$ – мультипликативная система, а $\bar{S}$ – её насыщение. Тогда: a) $S \subset \bar{S}$; b) система $\bar{S}$ насыщенна; c) локализации $S^{-1}A$ и $\bar{S}^{-1}A$ изоморфны.

Задача 4. Пусть $S \subset T \subset A$ – мультипликативные системы. Обозначим через ϕ гомоморфизм $S^{-1}A \to T^{-1}A$ такой, что $\phi(a/s) = a/s$. Покажите, что ϕ – изоморфизм $\iff T \subset \bar{S}$.

Задача 5. Опишите все насыщенные мультипликативные системы в $\mathbb{Z}$.

Определим отображение $i\colon A \to S^{-1}A$ формулой $i(a) = a/1$. Очевидно, это гомоморфизм. Он переводит все элементы S в обратимые.

Задача 6. Проверьте, что $\ker i$ состоит из таких a, что $as = 0$ при некотором $s \in S$.

Как локализация действует на идеалы? Относительно гомоморфизма $i\colon A \to S^{-1}A$ идеалы можно расширять и сужать.

Если $J \subset S^{-1}A$ – идеал, то $J^{ce} = J$. Действительно, $J^{ce} \subset J$ всегда. Пусть $x \in J, x = a/s$, тогда $s/1 \cdot x = a/1 \in J$, значит $a \in J^c$ и $a/1 \in J^{ce}$, следовательно $x = a/s = 1/s \cdot a/1 \in J^{ce}$.

Для идеала $I \subset A$ и $s \in A$ обозначим $(I : s) = \{x \in A \mid xs \in I\}$.

Предложение 16. *Пусть $I \subset A$, тогда $I^{ec} = \cup_{s \in S}(I : s)$.*

Доказательство. Любой элемент в I^e имеет вид i/s, $i \in I, s \in S$. Значит $x \in I^{ec}$ титтк $x/1 = i/s$ при некоторых $i \in I, s \in S$. Это значит, что $\exists t \in S$, для которого $t(xs - i) = 0$, т.е. $x \cdot ts = it \in I$ и $x \in (I : ts)$.

Обратно, если $x \in (I : s)$, то $xs = i \in I$, $x/1 = i/s$ и значит $x \in I^{ec}$. □

Следствие 17. *Отображение сужения устанавливает биекцию между множеством идеалов в $S^{-1}A$ и множеством таких идеалов $I \subset A$, что $\forall s \in S$ имеем $I = (I : s)$.*

Доказательство. Если $I = J^c \subset A$ – сужение, то $I^{ec} = J^{cec} = J^c = I$ и по предложению 16 имеем $I = (I : s)$ при всех $s \in S$.

Если $I = (I : s)$ при всех $s \in S$, то $I = I^{ec}$ и поэтому I – сужение. □

Если рассматривать только простые идеалы, можно сказать больше.

Предложение 18. *Отображение сужения $i^*\colon \mathrm{Spec}(S^{-1}A) \to \mathrm{Spec}(A)$ устанавливает гомеоморфизм между множеством простых идеалов в $S^{-1}A$ и его образом – множеством таких простых идеалов $\mathfrak{p} \subset A$, что $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.*

Доказательство. Надо проверить, что простой идеал $\mathfrak{p}$ не пересекается с S титтк $\forall s \in S$ выполнено $(\mathfrak{p} : s) = \mathfrak{p}$. Действительно, если $\exists s \in S \cap \mathfrak{p}$, то $(\mathfrak{p} : s) = A \neq \mathfrak{p}$. Если же $\exists s \in S$ такое, что $(\mathfrak{p} : s) \neq \mathfrak{p}$, то $\exists x \in (\mathfrak{p} : s), x \notin \mathfrak{p}$. Тогда $xs \in \mathfrak{p}$, значит $s \in \mathfrak{p}$ в силу простоты и $\mathfrak{p} \cap S$ непусто.

Кроме того, надо показать, что топология Зарисского на $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ получается ограничением топологии Зарисского с $\mathrm{Spec}(A)$. Прообраз любого замкнутого множества в $\mathrm{Spec}(A)$ при i^* замкнут в $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ в силу непрерывности i^*. Покажем, что образ замкнутого множества $V(J) \subset \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ (где $J \subset S^{-1}A$ – идеал) есть пересечение замкнутого в $\mathrm{Spec}(A)$ множества и образа i^*. Действительно, пусть $I = J^c$, тогда $J = I^e$. Проверим, что $i^*(V(J)) = V(I) \cap \mathrm{im}\, i^*$. Пусть $\mathfrak{q} \in V(J)$, значит $\mathfrak{q} \supset J$, тогда $i^*\mathfrak{q} \supset i^*J = I$, и $i^*\mathfrak{q} \in V(I)$. Пусть $\mathfrak{p} = i^*\mathfrak{q} \in V(I)$, значит $\mathfrak{q}^c \supset I$ и $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{ce} \supset I^e = J$, так что $\mathfrak{q} \in V(J)$. □

Пример 19.

1. Пусть $a \in A$, тогда образ отображения $i^*\colon \mathrm{Spec}(A_a) \to \mathrm{Spec}(A)$ – открытое подмножество $D_a \subset \mathrm{Spec}(A)$.

2. Для простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ образ отображения $i^*\colon \mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Spec}(A)$ состоит из простых идеалов, вложенных в $\mathfrak{p}$.