Тензорное произведение модулей

В прошлый раз мы определили тензорное произведение модулей над кольцом. Сегодня мы подробнее его изучим.

Для начала научимся вычислять тензорное произведение в некоторых случаях.

Лемма 1. *$A \otimes_A M \cong M$ для любого A-модуля M.*

Доказательство. Построим взаимно обратные гомоморфизмы в обе стороны. Гомоморфизм $A \otimes_A M \to M$ строится при помощи билинейного отображения $A \times M \to M$, переводящего (a, m) в am. Гомоморфизм $M \to A \otimes_A M$ зададим формулой $m \mapsto 1 \otimes m$. Легко видеть, что они взаимно обратны. □

Примеры:

1. $0 \otimes_A N \cong 0$ для любого A-модуля N;
2. $\mathbb{C}[x, y] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z] \cong \mathbb{C}[x, y, z]$;
3. Пусть X, Y – конечные множества, $\mathbb{R}^X, \mathbb{R}^Y$ – множества вещественнозначных функций на X и Y. Тогда $\mathbb{R}^X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^Y \cong \mathbb{R}^{X \times Y}$;
4. Пусть X, Y – множества (возможно, с дополнительной структурой), $R(X), R(Y)$ – множества хороших (в некотором смысле) функций на X и Y. Тогда имеется вложение $R(X) \otimes_{\mathbb{R}} R(Y) \to R(X \times Y)$. Этот пример обобщает два предыдущих.

Простейшие свойства тензорного умножения напоминают простейшие свойства умножения чисел – коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность.

Предложение 2. *Для любых A-модулей M, M', N, K имеются канонические изоморфизмы*

1. $(M \oplus M') \otimes N \cong (M \otimes N) \oplus (M' \otimes N)$;
2. $(M \otimes N) \otimes K \cong M \otimes (N \otimes K)$;
3. $M \otimes N \cong N \otimes M$.

Доказательство. Для доказательства можно построить взаимно обратные гомоморфизмы между левой и правой частями. Например, отображение $(M \oplus M') \otimes N \to (M \otimes N) \oplus (M' \otimes N)$ строится при помощи билинейного отображения $(M \oplus M') \times N \to (M \otimes N) \oplus (M' \otimes N)$, заданного формулой $((m, m'), n) \mapsto (m \otimes n, m' \otimes n)$. □

Следствие 3. *Если M и N – свободные модули с базисами e_i и f_j соответственно, то $M \otimes N$ – свободный модуль с базисом $e_i \otimes f_j$.*

Доказательство. $M = \oplus A e_i$, $N = \oplus A f_j$, по свойству 1 из предложения 2 и лемме 1 получаем

$$M \otimes N = \bigoplus_{i,j} (A \otimes A)(e_i \otimes f_j) = \bigoplus_{i,j} A(e_i \otimes f_j).$$

□

Теперь научимся перемножать циклические модули.

Определение 4. Пусть $I \subset A$ – идеал и M – модуль над A. Через $I \cdot M$ обозначим подмодуль в M, порождённый всеми элементами im, где $i \in I, m \in M$.

В частности, если $I, J \subset A$ – идеалы, то $I \cdot J \subset A$ – это идеал, порождённый всеми произведениями $ij, i \in I, j \in J$.

Предложение 5. *Пусть $I \subset A$ – идеал и M – модуль над A. Тогда*

$$A/I \otimes_A M \cong M/IM.$$

Доказательство. Построим взаимно обратные гомоморфизмы в обе стороны. Гомоморфизм $A/I \otimes_A M \to M/IM$ строится при помощи билинейного отображения $A/I \times M \to M/IM$, переводящего $([a], m)$ в $[am]$. Гомоморфизм $M/IM \to A/I \otimes_A M$ строится при помощи гомоморфизма $M \to A/I \otimes M$, переводящего m в $[1] \otimes m$. Он переводит IM в 0 и потому пропускается через фактор. $\square$

Предложение 6. *Пусть $I, J \subset A$ – идеалы. Тогда $A/I \otimes_A A/J \cong A/(I + J)$.*

Доказательство. По предыдущему предложению $A/I \otimes A/J \cong (A/J)/I(A/J) \cong A/(I+J)$. Последний изоморфизм получается факторизацией гомоморфизма $A/J \to A/(I+J)$ через его ядро. $\square$

Тензорно перемножать можно не только модули, но и гомоморфизмы модулей. Пусть $f\colon M \to M'$ и $g\colon N \to N'$ – гомоморфизмы A-модулей. Определим гомоморфизм $f \otimes g\colon M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ равенством $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$. Говоря более аккуратно, рассмотрим сквозное билинейное отображение $M \times N \to M' \times N' \xrightarrow{\tau'} M' \otimes N'$. По универсальному свойству тензорного произведения, оно пропускается через $\tau\colon M \times N \to M \otimes N$. Эту конструкцию удобно изображать диаграммой

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "\tau"] & M' \times N' \arrow[d, "\tau'"] \\
M \otimes N \arrow[r, dashed, "f \otimes g"] & M' \otimes N'
\end{tikzcd}.$$

При фиксированном левом (или правом) аргументе тензорное умножение становится операцией, сопоставляющей всякому модулю – модуль, а всякому гомоморфизму – гомоморфизм модулей. Такие операции называются функторами:

Определение 7. Пусть A и B – два кольца. *Функтором* из A-модулей в B-модули называется операция F, сопоставляющая каждому A-модулю M некоторый B-модуль $F(M)$, а каждому гомоморфизму A-модулей $f\colon M \to N$ – гомоморфизм B-модулей $F(f)\colon F(M) \to F(N)$, для которой выполнены два свойства:

1. $F(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{F(M)}$;
2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Как мы говорили раньше, для любых A-модулей M, N множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ тоже будет A-модулем. Это сопоставление позволяет превратить Hom в функтор двумя способами, фиксируя первый или второй аргумент.

Пример 8. Функтор $\mathrm{Hom}(M,-)$ из A-модулей в A-модули. Пусть M – фиксированный модуль над A. Пусть $g\colon N\to N'$ – гомоморфизм. Определим отображение $\bar g\colon \mathrm{Hom}(M,N)\to \mathrm{Hom}(M,N')$: $\bar g(\phi)=g\circ\phi$, как легко проверить, оно будет гомоморфизмом модулей. Положив

$$F(N)=\mathrm{Hom}(M,N),\quad F(g)=\bar g,$$

мы получим функтор.

Функторы, определённые выше, строго говоря, называются *ковариантными* функторами. Контравариантные функторы отличаются от них тем, что меняют направление стрелок.

Определение 9. Пусть A и B – два кольца. *Контравариантным функтором* из A-модулей в B-модули называется операция F, сопоставляющая каждому A-модулю M некоторый B-модуль $F(M)$, а каждому гомоморфизму A-модулей $f\colon M\to N$ – гомоморфизм B-модулей $F(f)\colon F(N)\to F(M)$, для которой выполнены два свойства:

1. $F(\mathrm{id}_M)=\mathrm{id}_{F(M)}$;
2. $F(f\circ g)=F(g)\circ F(f)$.

Пример 10. Функтор $\mathrm{Hom}(-,N)$ из A-модулей в A-модули. Пусть теперь N – фиксированный модуль над A. Пусть $f\colon M\to M'$ – гомоморфизм. Определим отображение $\bar f\colon \mathrm{Hom}(M',N)\to\mathrm{Hom}(M,N)$: $\bar f(\phi)=\phi\circ f$, как легко проверить, оно будет гомоморфизмом модулей. Положив

$$F(M)=\mathrm{Hom}(M,N),\quad F(f)=\bar f,$$

мы получим контравариантный функтор.

Пример 11. Функтор $-\otimes_A N$ из A-модулей в A-модули. Пусть N – фиксированный модуль над A. Положив

$$F(M)=M\otimes_A N,\quad F(f)=f\otimes 1\colon M\otimes N\to M'\otimes N\quad \text{для}\quad f\colon M\to M',$$

мы получим ковариантный функтор тензорного умножения.

Язык функторов удобен, так как позволяет говорить о разных вещах (например, тензорном умножении и модулях гомоморфизмов) одновременно.

Определение 12. Последовательность A-модулей и гомоморфизмов

$$\dots\to M^{i-1}\xrightarrow{d^{i-1}}M^i\xrightarrow{d^i}M^{i+1}\to\dots \tag{1}$$

называется *точной*, если $\operatorname{im}d^{i-1}=\ker d^i$ для любого i.

Частные случаи:

$$\begin{aligned}
0\to M'\xrightarrow{f}M\quad &\text{точна}\iff f\quad \text{инъективен};\\
M\xrightarrow{g}M''\to 0\quad &\text{точна}\iff g\quad \text{сюръективен};\\
0\to M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\to 0\quad &\text{точна}\iff f\quad \text{инъективен, } g \text{ сюръективен}\\
&\qquad\qquad \text{и } g \text{ индуцирует изоморфизм } M/\operatorname{im}f\cong M''.
\end{aligned}$$

Определение 13. Точная последовательность вида

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \tag{2}$$

называется *короткой точной последовательностью.*

Задача 1. Покажите, что для любого модуля N точны последовательности, полученные из последовательности (2)

$$0 \to \mathrm{Hom}(N, M') \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Hom}(N, M) \xrightarrow{\bar{g}} \mathrm{Hom}(N, M''),$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{g}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Hom}(M', N).$$

Определение 14. Функтор называется *точным*, если он переводит любую короткую точную последовательность в короткую точную последовательность. Функтор F называется *точным слева* (*точным справа*), если он переводит любую короткую точную последовательность (2) в точную последовательность $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$ (в точную последовательность $F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$).

Таким образом, $\mathrm{Hom}(N, -)$ точен слева, и $\mathrm{Hom}(-, N)$ точен слева.

Задача 2. Покажите, что для модуля P следующие условия равносильны:

1. для любой точной последовательности (1) точна последовательность
$$\ldots \to \mathrm{Hom}(P, M^{i-1}) \to \mathrm{Hom}(P, M^i) \to \mathrm{Hom}(P, M^{i+1}) \to \ldots;$$
2. для любой короткой точной последовательности (2) точна последовательность
$$0 \to \mathrm{Hom}(P, M') \to \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, M'') \to 0;$$
3. для любого сюръективного гомоморфизма $g\colon M \to M''$ гомоморфизм $\mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, M'')$ сюръективен.

Такие модули называются *проективными.*

Задача 3. Покажите, что для модуля I следующие условия равносильны:

1. для любой точной последовательности (1) точна последовательность
$$\ldots \leftarrow \mathrm{Hom}(M^{i-1}, I) \leftarrow \mathrm{Hom}(M^i, I) \leftarrow \mathrm{Hom}(M^{i+1}, I) \leftarrow \ldots;$$
2. для любой короткой точной последовательности (2) точна последовательность
$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(M', I) \leftarrow \mathrm{Hom}(M, I) \leftarrow \mathrm{Hom}(M'', I) \leftarrow 0;$$
3. для любого инъективного гомоморфизма $f\colon M' \to M$ гомоморфизм $\mathrm{Hom}(M, I) \to \mathrm{Hom}(M', I)$ сюръективен.

Такие модули называются *инъективными.*

Задача 4. Покажите, что последовательность модулей и гомоморфизмов $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ точна $\iff$ для любого модуля N точна последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{g}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Hom}(M', N).$$

Задача 5. Покажите, что последовательность модулей и гомоморфизмов $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ точна $\iff$ для любого модуля N точна последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(N, M') \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Hom}(N, M) \xrightarrow{\bar{g}} \mathrm{Hom}(N, M'').$$

Предложение 15. *Имеем естественные изоморфизмы для любых A-модулей M, N, K:*

$$\mathrm{Hom}(M \otimes_A N, K) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, K)).$$

Доказательство. Левая часть изоморфна множеству билинейных отображений $\phi\colon M \times N \to K$. Любое такое отображение определяет гомоморфизм $\psi\colon M \to \mathrm{Hom}(N, K)$, переводящий m в $\phi(m, -) \in \mathrm{Hom}(N, K)$, и наоборот. □

Предложение 16. *Функтор $- \otimes_A N$ на A-модулях точен справа. То есть, для любой короткой точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ последовательность*

$$M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$$

точна.

Доказательство. По задаче 4, необходимо проверить, что последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'' \otimes N, K) \to \mathrm{Hom}(M \otimes N, K) \to \mathrm{Hom}(M' \otimes N, K)$$

точна для любого модуля K. Эта последовательность по предложению 15 изоморфна последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', \mathrm{Hom}(N, K)) \to \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, K)) \to \mathrm{Hom}(M', \mathrm{Hom}(N, K)),$$

которая точна по той же задаче 4. □

Точность справа тензорного умножения даёт возможность вычислять его, используя т.н. резольвенты. Покажем, как это работает, на примере.

Пример 17. Пусть $A = \mathbb{C}[x, y]$, $M = (x, y) \subset A$, $\mathbb{C} = A/M$. Вычислим $M \otimes_A \mathbb{C}$ и $M \otimes_A M$. Для этого рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to Ae \xrightarrow{f} Ae_1 \oplus Ae_2 \xrightarrow{g} M \to 0,$$

где $f(e) = ye_1 - xe_2$, а $g(e_1) = x, g(e_2) = y$. Умножая её тензорно на $\mathbb{C}$, получим точную последовательность

$$\mathbb{C}e \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \xrightarrow{\widetilde{g}} M \otimes \mathbb{C} \to 0,$$

где $\widetilde{f} = 0$, так как на $\mathbb{C}$ умножение на x и y нулевое. Значит, $\widetilde{g}$ – изоморфизм, и $M \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Вычисляя аналогично $M \otimes M$, получим

$$M \otimes_A M \cong (M \oplus M)/\langle (xy, -x^2), (y^2, -xy) \rangle.$$