9. ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ.

Точка $a \in M$ называется невырожденной критической точкой функции $f \in C^\infty(M)$, если $f'(a) = 0$ и матрица $\nabla^2 f(a)$ частных производных второго порядка функции $(f \circ x^{-1})$ в точке $x(a)$ невырождена; здесь x — какие-нибудь координаты в окрестности точки a.

Задача 1. а) Докажите, что гладкая функция общего положения на гладком многообразии является функцией Морса, т.е. имеет только невырожденные критические точки. б) Докажите, что значения гладкой функции общего положения в различных критических точках различны (т.е. функция является строгой функцией Морса). в) Докажите, что в однопараметрическом семействе общего положения гладких функций на M все функции, кроме конечного числа, являются функциями Морса. Исключительные функции могут иметь вырожденные критические точки, в которых ядро матрицы $\nabla^2 f(a)$ одномерно, а также могут иметь две невырожденных критических точки, в которых f принимает одно и то же значение. г) Докажите, что при исключительном значении параметра в семействе общего положения появляются (или исчезают) две критические точки соседних индексов.

Задача 2. Докажите, что плоская кривая общего положения а) гладкая, б) имеет только простые трансверсальные самопересечения. в) Докажите, что кривая общего положения в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, гладкая и не имеет самопересечений.

Задача 3. а) Докажите, что однопараметрическое семейство плоских кривых общего положения имеет лишь конечное число особенностей вида, перечисленного на рис. 1. б) Имеются ли в однопараметрическом семействе общего положения кривых в $\mathbb{R}^3$ негладкие кривые?

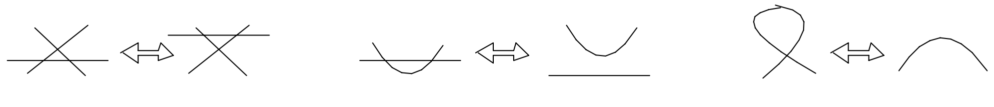

Рис. 1. Особенности однопараметрического семейства плоских кривых