8. ГРАДИЕНТ, РОТОР, ДИВЕРГЕНЦИЯ

В формулировках задач этого листка имеются намеренные неточности! замечайте и исправляйте.

Задача 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. а) Докажите, что $\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}(xdy - ydx)$ равен площади области Ω. Каков геометрический смысл равенства? б) Обобщение (теорема Грина): докажите равенство $\oint_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_\Omega (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$. в) Пусть γ — плоская замкнутая кривая. Чему равен интеграл $\oint_\gamma (x\,dy - y\,dx)$? г) А интеграл $\oint_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$?

Пусть $f(x,y,z)$ — гладкая функция в трехмерном пространстве, $F = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ — векторное поле. Градиентом функции называется векторное поле $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$; дивергенцией векторного поля называется функция $\nabla \cdot F \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$; ротором векторного поля F называется векторное поле $\nabla \times F \overset{\text{def}}{=} (\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})$.

Задача 2. а) Придайте инвариантный смысл понятиям градиента, ротора и дивергенции. Докажите, что ротор градиента и дивергенция ротора равны нулю. б) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Докажите равенство (теорема Остроградского–Гаусса) $\iiint_\Omega (\nabla \cdot F)(x)\,dV = \iint_{\partial\Omega} (F(x) \cdot \mathbf{n}(x))\,dS$. Здесь dV — элемент объема в области Ω, dS — элемент площади на границе $\partial\Omega$, $\mathbf{n}(x)$ — вектор единичной нормали к границе. в) Пусть $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная ориентированная пленка, затягивающая контур $\partial\Sigma$. Докажите равенство $\iint_\Sigma (\nabla \times F)(x) \cdot \mathbf{n}(x)\,dS = \oint_{\partial\Sigma} F \cdot d\ell$. Здесь $\mathbf{n}(x)$ и dS — как в пункте 2б, а $d\ell$ — элемент длины на кривой $\partial\Sigma$.

Задача 3. Электрическое поле $E(x,y,z,t)$ и магнитное поле $B(x,y,z,t)$ в трехмерном пространстве удовлетворяют уравнениям Максвелла: $\nabla \cdot E = 0$, $\nabla \cdot B = 0$, $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$, $\nabla \times B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$. а) Придайте уравнениям инвариантный смысл. б) Докажите, что существует функция φ (потенциал) и векторное поле A (векторный потенциал) такие, что $E = \nabla\varphi$, $B = \nabla \times A$. Запишите уравнения Максвелла в терминах φ и A.