# 6. ТЕОРЕМА О РАЗБИЕНИИ ЕДИНИЦЫ.

Носителем функции $f$ называется множество $\operatorname{supp} f \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$.

**Задача 1.** а) Докажите, что функция $f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ — гладкая. б) Постройте гладкую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, носитель которой — шар радиуса 1 с центром в начале координат.

**Задача 2.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $K \subset U$ — компакт. Докажите, что существует гладкая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) > 0$ при $x \in \operatorname{int} K$, $f(x) \geq 0$ при $x \in U \setminus K$ и $f(x) = 0$ при $x \notin U$. Сохранится ли этот результат, если компакт заменить произвольным замкнутым множеством?

**Задача 3.** Пусть $M$ — компактное многообразие, $M = U_1 \cup \dots \cup U_N$, где все $U_i \subset M$ — открытые подмножества. Докажите, что существуют компакты $K_1, \dots, K_N$ такие, что $K_i \subset U_i$ при всех $i$, и $M = \bigcup_i \operatorname{int} K_i$.

**Указание.** С помощью индукции по $m$ постройте набор компактов $K_1, \dots, K_m$ такой, что $K_i \subset U_i$ и $M = \operatorname{int} K_1 \cup \dots \cup \operatorname{int} K_m \cup U_{m+1} \cup \dots \cup U_N$.

**Задача 4.** Докажите теорему о разбиении единицы: пусть $M$ — компактное многообразие, $M = U_1 \cup \dots \cup U_N$, где все $U_i \subset M$ — открытые подмножества. Докажите, что существуют функции $f_1, \dots, f_N \in C^\infty(M)$ такие, что $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ для всех $i$ и $f_1(x) + \dots + f_N(x) \equiv 1$.

**Задача 5.** Сформулируйте теорему о разбиении единицы для некомпактных многообразий. Докажите теорему о разбиении единицы для некомпактных многообразий, а) имеющих компактное исчерпание: $M = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$, где $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset M$ — компакты; б) вложенных в $\mathbb{R}^k$ (при произвольном $k$).