5. РАЗНОЕ.

Задача 1. Пусть M — связное многообразие. а) Докажите, что M линейно связно. б) Докажите, что любые две точки M можно соединить гладкой несамопересекающейся кривой. в) Докажите, что для любых точек $a, b \in M$ существует диффеоморфизм $f : M \to M$, для которого $f(a) = b$.

Задача 2. Пусть $\gamma : [0,1] \to M$ — гладкая несамопересекающаяся (в том числе не замкнутая) кривая. Докажите, что существует открытое множество $U \subset M$, гомеоморфное шару и такое, что $\gamma([0,1]) \subset U$.

Задача 3. а) Докажите, что слой над точкой a симметрического квадрата $\mathrm{Symm}^{(2)}(T^*M)$ кокасательного расслоения многообразия M можно естественно отождествить с множеством квадратичных форм на пространстве T_aM. б) Докажите, что расслоение $\mathrm{Symm}^{(2)}(T^*M)$ имеет сечение, значение которого в каждой точке a является положительно определенной формой. Выведите отсюда, что расслоения TM и T^*M изоморфны.

Задача 4. Докажите, что на m-мерном многообразии тогда и только тогда существует m-форма, не обращающаяся в нуль, когда многообразие ориентируемо.

Задача 5. а) Докажите, что на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ существует и единственна с точностью до множителя 2-форма, инвариантная относительно действия группы $\mathrm{SO}(3)$. б) Выпишите эту форму явно в координатах ψ, φ (широта и долгота). в) Найдите все $\mathrm{SO}(3)$-инвариантные 2-формы на $\mathbb{R}^3$. Проверьте, что при ограничении на S^2 получаются формы, описанные в пункте 5б.