4. ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ.

Задача 1. Пусть η — нетривиальное линейное расслоение на S^1. Тривиальны ли расслоения а) $\eta \oplus \cdots \oplus \eta$ (n раз)? б) $\eta^{\otimes n}$?

Задача 2. Докажите, что касательное и кокасательное расслоения к S^2 изоморфны. Можно ли распространить эту теорему на произвольные многообразия?

Задача 3. Пусть N — линейное расслоение с базой S^n, слой которого над точкой a — прямая, нормальная к $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в точке a (уточните структуру расслоения!). а) Докажите, что N — тривиальное расслоение. б) Докажите, что $TS^n \oplus N$ — тривиальное расслоение.

Задача 4. а) Докажите, что каждое линейное расслоение на S^2 тривиально. б) Докажите, что расслоение TS^2 нельзя разложить в сумму подрасслоений. в) Перечислите (с точностью до эквивалентности) линейные расслоения с базой $\mathbb{R}P^2$. г) Докажите, что для любого такого расслоения ν сумма $T\mathbb{R}P^2 \oplus \nu$ не будет тривиальным расслоением. Выведите отсюда, что в $\mathbb{R}^3$ не существует подмногообразия, диффеоморфного $\mathbb{R}P^2$.

Задача 5. а) Слоем тавтологического расслоения над точкой $a \in \mathbb{C}P^1$ является a (прямая в $\mathbb{C}^2$). Докажите, что тензорный квадрат тавтологического расслоения над $\mathbb{C}P^1$ — касательное расслоение к $\mathbb{C}P^1$. б) Разложите тензорный квадрат расслоения TS^2 на подрасслоения.