ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Теорема Стокса. Лемма Пуанкаре.

Теорема 1 (Стокса). *Пусть M — ориентированное m-мерное многообразие с краем; $\iota : \partial M \to M$ — тавтологическое вложение, и $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ — форма с компактным носителем. Тогда $\int_{\partial M} \iota^* \omega = \int_M d\omega$.*

Замечание. Теорема верна (вместе с доказательством) также для многообразий без края; в этом случае подразумевается, что левая (а, следовательно, и правая) часть равенства равна нулю.

Доказательство. Пусть сначала $M = \mathbb{R}^m$; в силу линейности достаточно рассмотреть случай $\omega = f(x)\,dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$. Тогда $d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$, и $\int_{\mathbb{R}^m} \omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,dx_1) dx_2 \dots dx_m = 0$, поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,dx_1 = f(+\infty, x_2, \dots, x_m) - f(-\infty, x_2, \dots, x_m) = 0$ ($\operatorname{supp} f$ компактен и, следовательно, ограничен).

Пусть теперь $M = [0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$; при этом первый сомножитель соответствует координате x_1. Тогда нужно рассмотреть два случая: $\omega = f(x)\,dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1}$ и $\omega = f(x)\,dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$. В первом случае $\iota^*\omega = 0$; равенство $\int_M d\omega = 0$ проверяется так же, как в случае $M = \mathbb{R}^m$. Во втором случае $\int_M d\omega = (-1)^m \int_M \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_1 \dots dx_m = (-1)^{m+1} \int_{(x_2,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}} f(0, x_2, \dots, x_m)\,dx_2 \dots dx_m = \int_{\partial M} \iota^*\omega$.

Для произвольного M пусть $(U_1, V_1, x_1), \dots, (U_N, V_N, x_N)$ — карты, используемые в определении интеграла от ω, и $U_0 = M \setminus \operatorname{supp}\omega$. Пусть $\varrho_0, \dots, \varrho_N$ — разбиение едининцы, подчиненное покрытию $U_0, \dots, U_N$. Тогда $\omega = \sum_{i=1}^N \varrho_i \omega$ ($\varrho_0(a) = 0$ при $a \in \operatorname{supp}\omega$); в силу линейности достаточно доказать теорему для формы $\varrho_\alpha \omega$. Согласно определению интеграла, $\int_M d\varrho_\alpha\omega = \int_{V_\alpha} dx_\alpha^* \varrho_\alpha \omega$ (отображение x_α сохраняет ориентацию), и $\iota_0^* x_\alpha^* \varrho_\alpha \omega = x_\alpha^* \iota^* \varrho_\alpha \omega$, где $\iota_0 : V_\alpha \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \to V_\alpha$ — тавтологическое вложение (отображение x_α переводит край в край). Носитель формы $x_\alpha^* \varrho_\alpha \omega$ — компактное подмножество либо $\mathbb{R}^m$, либо $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$, а для таких форм теорема уже доказана. □

Пример 1. Пусть M — компактное ориентированное m-мерное многообразие без края, $f_t : M \to N$ — семейство гладких отображений, и $\omega \in \Omega^m(N)$ — замкнутая форма: $d\omega = 0$. Определим гладкое отображение $F : M \times [0,1] \to N$ формулой $F(a,t) = f_t(a)$. Тогда $\int_M f_1^*\omega - \int_M f_0^*\omega = \int_{\partial(M \times [0,1])} F^*\omega = \int_M dF^*\omega = \int_M F^* d\omega = 0$ — иными словими, $\int_M f_t^*\omega$ не зависит от t. Заметим, что если $\omega = d\nu$, то $\int_M f_t^*\omega = \int_M df_t^*\nu = 0$ (поскольку M не имеет края).

Напомним, что дифференциальные формы на многообразии M образуют коцепной комплекс (комплекс де Рама) $0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \to 0$; его гомологии называются когомологиями де Рама многообразия M: $H^i_{\mathrm{DR}}(M)$. Поскольку комплекс де Рама — комплекс векторных пространств, когомологии де Рама тоже являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$; то есть $H^i_{\mathrm{DR}}(M) = \mathbb{R}^{\beta_i}$; β_i называется i-м числом Бетти многообразия M. Положим по определению $H^i(M) = 0$ при $i > m$.

Пример 2. Пусть $M = \mathbb{R}$; тогда $\Omega^0(M) = C^\infty(\mathbb{R})$ и $\Omega^1(M) = \{f(t)\,dt \mid f \in C^\infty(\mathbb{R})\}$. Дифференциал d действует по формуле $df = f'(t)\,dt$, поэтому $H^0(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} d$ состоит из констант и изоморфна $\mathbb{R}$. Для любой 1-формы имеем $f(t)\,dt = d\big(\int_0^t f(s)\,ds\big)$, откуда $\operatorname{Im} d = \Omega^1(\mathbb{R})$ и $H^1(\mathbb{R}) = 0$.

Пример 3. Пусть $M = S^1$, и $d\varphi$ — стандартная форма объема на S^1. Тогда $\Omega^1(S^1) = \{f(\varphi)\,d\varphi \mid f \in C^\infty(S^1)\}$, и дифференциал действует по формуле $df(\varphi) = f'(\varphi)\,d\varphi$. Как и в случае $\mathbb{R}$, имеем $H^0(S^1) = \mathbb{R}$. Если $\omega = df$, то по теореме Стокса $\int_{S^1} \omega = 0$. С другой стороны, если $\int_{S^1} f(\varphi)\,d\varphi = 0$, то $f(\varphi)\,d\varphi = d\big(\int_0^\varphi f(u)\,du\big)$ (в точке $\varphi = 2\pi$ имеем $\int_0^{2\pi} f(u)\,du = 0$, так что функция под знаком дифференциала корректно определена на S^1. Тем самым $\operatorname{Im} d = \operatorname{Ker} \int_{S^1}$, откуда $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

Теорема 2 (де Рама). *Когомологии комплекса де Рама многообразия изоморфны его сингулярным когомологиям с коэффициентами в $\mathbb{R}$.*

Полностью доказать теорему де Рама мы не сможем, но докажем несколько частичных результатов. Прежде всего заметим, что если $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение, то возникает морфизм комплексов $f^* : \Omega(M_2) \to \Omega(M_1)$ (набор отображений $f : \Omega_i(M_2) \to \Omega_i(M_1)$, где $i = 0, \dots, m$, коммутирующий с дифференциалом: $df^* = f^* d$). Следовательно (почему?) возникает отображение когомологий $f^* : H^i(M_2) \to H^i(M_1)$ (индекс DR мы будем пропускать). Как и отображение форм, это отображение обладает свойством $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, т.е. определяет функтор из категории гладких многообразий в категорию векторных пространств.

Теорема 3 (лемма Пуанкаре)**.** *Пусть M — многообразие (возможно, с краем), и $\pi : M \times \mathbb{R}^n \to M$ — естественная проекция. Тогда отображение в когомологиях $\pi^* : H^i(M) \to H^i(M \times \mathbb{R}^n)$ — изоморфизм при всех i.*

Лемма 1. *Пусть задан морфизм коцепных комплексов $f : A \to B$, т.е. коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \to & A_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}^A} & A_i & \xrightarrow{d_i^A} & A_{i+1} & \to \ldots \\ & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i+1} & \\ \cdots \to & B_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}^B} & B_i & \xrightarrow{d_i^B} & B_{i+1} & \to \ldots \end{array},$$

и пусть для этого комплекса существует цепная гомотопия, т.е. набор отображений $K_i : A_i \to B_{i-1}$ таких, что $f_i = \pm d_{i-1}^B K_i \pm K_{i+1} d_i^A$. Тогда отображение в когомологиях $f^* : H^i(A) \to H^i(B)$ — нулевое.

Доказательство. Если $x \in \operatorname{Ker} d_i^A$, то $f_i(x) = \pm d_{i-1}^B K_i(x)$, то есть $f_i(x) \in \operatorname{Im} d_{i-1}^B$. $\square$

Доказательство леммы Пуанкаре. Достаточно разобрать случай $n = 1$ и провести очевидную индукцию.

Определим отображение $s : M \to M \times \mathbb{R}$ формулой $s(a) = (a, 0)$ и докажем, что $s^*\pi^* = \mathrm{id}$ и $\pi^* s^* = \mathrm{id}$ в когомологиях M и $M \times \mathbb{R}$ соответственно. Очевидно, $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, откуда вытекает, что $s^*\pi^* = \mathrm{id}$ в $\Omega(M)$ и, следовательно, в $H_{DR}(M)$

Для доказательства второго равенства возьмем в качестве карт в многообразии $M \times \mathbb{R}$ тройки $(U \times \mathbb{R}, V \times \mathbb{R}, (x, t))$, где (U, V, x) — координаты на многообразии M, а $t : M \times \mathbb{R} \to M$ — проекция на второй сомножитель. Произвольная k-форма на $M \times \mathbb{R}$ однозначно представляется в виде суммы $\omega_1 + \omega_2 \wedge dt$, где ω_1, ω_2 — соответственно, k-форма и $(k-1)$-форма, не содержащие дифференциала dt. Локально ω_1 и ω_2 выглядят как сумма членов вида $f(x_1, \ldots, x_m, t) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}$, где $s = k$ и $s = k - 1$ соответственно.

Положим по определению $K(f(x_1, \ldots, x_m, t) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = 0$ и $K(f(x_1, \ldots, x_m, t) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt) = \left(\int_0^t f(x_1, \ldots, x_m, u)\, du\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Докажем, что K – цепная гомотопия для отображения В силу линейности и локальности достаточно проверить равенство $1 - \pi^* s^* = \pm dK \pm Kd$ на формах вида $\omega_1 = f(x, t) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ и $\omega_2 = f(x, t) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \wedge dt$. Имеем $dK\omega_1 = 0$, $Kd\omega_1 = \pm K \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \wedge dt = \pm \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x, u) du\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \omega_1 - f(x, 0)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = (1 - \pi^* s^*)\omega_1$. Для формы ω_2 вычисление аналогично. $\square$

Следствие 1. $H_i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ *при* $i = 0$ *и* 0 *при* $i > 0$.

Следствие 2. *Пусть гладкие отображения $f_0 : M_1 \to M_2$ и $f_1 : M_1 \to M_2$ гладко гомотопны: существует семейство отображений $f_t : M_1 \to M_2$, $0 \le t \le 1$, гладко зависящее от t. Тогда $f_0^* = f_1^*$ в когомологиях.*

Доказательство. Определим гладкое отображение $F : M_1 \times [0, 1] \to M_2$ равенством $F(x, t) = f_t(x)$. Тогда $f_t = F \circ s_t$, где $s_t : M_1 \times M_1 \times \mathbb{R}$ задано формулой $s_t(a) = (a, t)$. Согласно теореме 3, $s_0^* = (\pi^*)^{-1} = s_1^*$ в когомологиях, где $\pi : M_1 \times [0, 1] \to M_1$ — проекция. Тогда Имеем $f_0^* = s_0^* F^* = s_1^* F^* = f_1^*$. $\square$

Многообразия M_1 и M_2 называются гладко гомотопически эквивалентными, если существуют гладкие отображения $f : M_1 \to M_2$ и $g : M_2 \to M_1$ и гладкие гомотопии $f \circ g \sim \mathrm{id}_{M_2}$ и $g \circ f \sim \mathrm{id}_{M_1}$. Отображения f и g называются гладкими гомотопическими эквивалентностями.

Следствие 3 (следствия 2)**.** *Гладкие гомотопические эквивалентности задают изоморфизм когомологий де Рама.*