ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Операции на векторных расслоениях.

Пусть $\xi : X \to B$ — векторное расслоение ранга k, $U, V \subset B$ — тривиализующие окрестности, $\psi_U : \xi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^k$ — тривиализация, $\varphi_x^{UV} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \stackrel{\text{def}}{=} \psi_V|_{\xi^{-1}(x)}\ \psi_U|_{\xi^{-1}(x)} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — отображение перехода (для каждого $x \in U \cap V$). Набор отображений перехода обладает очевидными свойствами:

1) $\varphi_x^{UU} = I\, \forall x \in U$ (единичный оператор);
2) $\varphi_x^{VU} = (\varphi_x^{UV})^{-1}\, \forall x \in U \cap V$;
3) $\varphi_x^{UV} \circ \varphi_x^{VW} \circ \varphi_x^{WU} = I\, \forall x \in U \cap V \cap W$.

(разумеется, 2 следует из 1 и 3).

Лемма 1. *Пусть B — топологическое пространство, покрытое открытыми множествами, и для каждой пары U, V таких множеств задано семейство линейных операторов $\varphi_x^{UV} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, непрерывно зависящих от точки $x \in U \cap V$ и обладающих свойствами 1–3. Тогда существует и единственно (с точностью до эквивалентности) векторное расслоение ранга k с базой B, для которого φ_x^{UV} являются отображениями перехода.*

Доказательство. Для доказательства существования поступим, как при доказательстве существования многообразия с данным атласом: рассмотрим множества $U \times \mathbb{R}^k$ для всех открытых множеств U, упомянутых в условии, и отождествим при каждом $x \in U \cap V$ и каждом $q \in \mathbb{R}^k$ пары $(x, q) \in U \times \mathbb{R}^k$ и $(x, \varphi_x^{UV} q) \in V \times \mathbb{R}^k$. Обозначим E фактор дизъюнктного объединения всех $U \times \mathbb{R}^k$ по всем отождествлениям. Отображение $p : E \to B$ определено формулой $p(x.q) = x$ — очевидно, оно выдерживает склейку.

Докажем, что разные точки слоя $p^{-1}(x)$ при этом не отождествляются: если $(x, q_1) \sim (x, q_2) \in U \times \mathbb{R}^k$, то $q_1 = q_2$. Действительно, $(x, q_1) \sim (x, q_2)$ означает, что существует последовательность открытых множеств $U_1 = U, U_2, \dots, U_N = U$ таких, что $x \in U_i$ при всех i и $q_2 = \varphi_x^{U_{N-1}U_N} \circ \dots \varphi_x^{U_2U_1}(q_1)$. Применяя $N-1$ раз свойство 3 и затем свойство 1, получим $q_2 = \varphi_x^{UU}(q_1) = q_1$.

Теперь определим тривиализацию $\psi_U : p^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}^k$ как проекцию на второй сомножитель. □

Пусть теперь $\xi : X \to B$ — расслоение ранга k. Определим расслоение ξ^* с отображениями перехода $\lambda_x^{UV} \stackrel{\text{def}}{=} ((\varphi_x^{UV})^*)^{-1}$ (слой $(\mathbb{R}^k)^* = \mathbb{R}^k$). Поскольку для любых линейных операторов A, B имеют место равенства $(AB)^* = B^*A^*$ и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, свойства 1–3 выполнены, и расслоение определено. Оно называется расслоением, двойственным к ξ. Расслоение, двойственное к касательному расслоению многообразия M, называется кокасательным и обозначается T^*M.

Пусть $v \in \xi^{-1}(a)$ и $\nu \in (\xi^*)^{-1}(a)$, где $a \in U \subset B$, U — тривиализующая окрестность. Определим число $\langle \nu, v\rangle \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_U(v), \varrho_U(\nu))$, где ψ_U, ϱ_U — тривиализации исходного и двойственного расслоения; в правой части стоит стандратное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$. Из определения двойственного расслоения вытекает, что $\langle \nu, v\rangle$ не зависит от тривиализации: если $a \in U \cap V$, то $(\psi_V(v), \varrho_V(\nu)) = (\varphi_a^{UV}\psi_U(v), \lambda_a^{UV}\varrho_U(\nu)) = ((\lambda_a^{UV})^*\varphi_a^{UV}\psi_U(v), \varrho_U(\nu)) = (\psi_U(v), \varrho_U(\nu))$. Тем самым слой $(\xi^*)^{-1}(a)$ двойственного расслоения естественно отождествляется с пространством $(\xi^{-1}(a))^*$, двойственным к слою исходного расслоения.

Пусть теперь $\eta : Y \to B$ — другое расслоение (ранга l) с той же базой и отображениями перехода $\omega_x^{UV} : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$. Символом $\xi \oplus \eta$ обозначим расслоение ранга $k+l$ с базой B и отображениями перехода $\lambda_x^{UV} = \psi_x^{UV} \oplus \omega_x^{UV} : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$. Нетрудно проверить (проделайте!), что свойства 1–3 выполнены. Полученное расслоение называется прямой суммой расслоений ξ и η; аналогично случаю двойственного расслоения можно показать, что слой этого расслоения над точкой a естественно изоморфен прямой сумме слоев расслоений ξ и η над той же точкой. Также можно рассмотреть расслоение $\xi \otimes \eta$, в котором стандартным слоем будет $\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{kl}$, а отображениями перехода $\lambda_x^{UV} = \psi_x^{UV} \otimes \omega_x^{UV}$ — это тензорное произведение расслоений ξ и η; его слой — тензорное произведение слоев ξ и η.

В тензорной степени $\xi^{\otimes n}$ расслоения ξ существуют подрасслоения $S^n(\xi)$ и $\xi^{\wedge n}$ — симметрическая и внешняя степень расслоения ξ. Их слои состоят из, соответственно, симметрических и кососимметрических тензоров $S^n(\mathbb{R}^k), (\mathbb{R}^k)^{\wedge n} \subset (\mathbb{R}^k)^{\otimes n} = \mathbb{R}^{k^n}$ (во втором случае, разумеется, $n \le k$), а отображениями перехода служат ограничения n-й тензорной степени $(\varphi_x^{UV})^{\otimes n}$ на множество таких тензоров — они иногда называются, соответственно, симметрической и внешней степенью оператора φ_x^{UV}. Ранги симметрической и внешней степени равны, соответственно, C_{k+n}^n и C_k^n. Можно рассмотреть также полную внешнюю алгебру $\xi^{\wedge *}$, порожденную данным расслоением ξ; это расслоение ранга 2^k со структурой алгебры (т.е. с билинейным умножением) в слоях.

Если имеется морфизм расслоений $\xi_1 : X_1 \to B_1$ и $\xi_2 : X_2 \to B_2$, т.е. пара $F = (f, \tilde{f})$ непрерывных отображений $f : B_1 \to B_2$, $\tilde{f} : X_1 \to X_2$ таких, что $f \circ \xi_1 = \xi_2 \circ \tilde{f}$ и ограничение $\tilde{f}\Big|_{\xi_1^{-1}(x)} : \xi_1^{-1}(x) \to \xi_2^{-1}(f(x))$ является линейным отображением, а также морфмзм $G = (f, \tilde{g})$ расслоений $\eta_1 : Y_1 \to B_1$ и $\eta_2 : Y_2 \to B_2$ (с тем же f!), то определены морфизмы расслоений $F \oplus G : \xi_1 \oplus \eta_1 \to \xi_2 \oplus \eta_2$, $F \otimes G : \xi_1 \otimes \eta_1 \to \xi_2 \otimes \eta_2$, а также $S^n(F) : S^n(\xi_1) \to S^n(\xi_2)$ и $F^{\wedge n} : \xi_1^{\wedge n} \to \xi_2^{\wedge n}$ следующим образом. Пусть, например, Z_1 — тотальное пространство расслоения $\xi_1 \oplus \eta_1 : Z_1 \to B_1$, и Z_2 — аналогично для $\xi_2 \oplus \eta_2$. Пусть $z \in Z_1$; тогда по определению прямой суммы расслоений $z = a + b$, где $a \in X_1$, $b \in Y_1$ и $\xi_1(a) = \eta_1(b) \stackrel{\text{def}}{=} x \in B$, причем a и b определены однозначно. Положим тогда $\varrho(z) = \tilde{f}(a) + \tilde{g}(b)$; по определению, $\xi_2(\tilde{f}(a)) = \eta_2(\tilde{g}(b)) = f(x)$, так что сумма определена и мы построили морфизм расслоений. Для всех остальных случаев конструкция аналогична: в качестве морфизма рассматривается пара (f, ϱ), где $\varrho(z)$ при z в слое над точкой $x \in B$ получается применением соответствующей операции (тензорного умножения, симметрической степени и т.п.) к линейным отображениям в слоях расслоений ξ_1 (и, если нужно, η_1) над точкой x. Заметим, однако, что для двойственного расслоения такой конструкции нет, поскольку оператору $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ соответствует не другой оператор $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, а оператор $A^* : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$, действующий в обратную сторону.

Обобщением приведенных конструкций является следующая: пусть F — ℓ-местный ковариантный функтор на категории векторных расслоений с морфизмами — обратимыми линейными отображениями. Тогда для любого набора расслоений $\xi_1, \dots, \xi_\ell$ рангов $k_1, \dots, k_\ell$ с одной и той же базой B можно определить расслоение $F(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$ с той же базой, беря в качестве стандратного слоя $F(\mathbb{R}^{k_1}, \dots, \mathbb{R}^{k_\ell})$, а в качестве отображения перехода $\varphi_x^{UV} = F((\varphi_x^{UV})^{(1)}, \dots, (\varphi_x^{UV})^{(\ell)})$, где $(\varphi_x^{UV})^{(i)}$ — отображение перехода расслоения ξ_i. Выполнение свойств 1–3 вытекает из того, что F — ковариантный функтор. Если F — ковариантный функтор на категории линейных пространств с морфизмами — *произвольными* линейными отображениями, и имеется набор морфизмов $g_i = (f_i, f) : \xi_i \to \eta_i$ (где $f : B_1 \to B_2$ — непрерывное отображение баз), то возникает морфизм расслоений $F(g_1, \dots, g_\ell) : F(\xi_1, \dots, \xi_\ell) \to F(\eta_1, \dots, \eta_\ell)$.