ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Коммутатор векторных полей. Теорема Фробениуса.

Лемма 1. *Коммутатор $[X,Y] \stackrel{def}{=} XY - YX$ двух дифференцирований X и Y произвольной алгебры является дифференцированием.*

Доказательство. $[X,Y](fg) = X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(fY(g)+gY(f)) - Y(fX(g)+gX(f)) = X(f)Y(g) + fX(Y(g)) + X(g)Y(f) + gX(Y(f)) - Y(f)X(g) - fY(X(g)) - Y(g)X(f) - gY(X(f)) = f[X,Y](g) + g[X,Y](f)$. □

Векторное пространство V с билинейной операцией $[\cdot,\cdot]$ (называемой коммутатором) называется алгеброй Ли, если коммутатор обладает следующими свойствами:

1) $[Y,X] = -[X,Y]$ (кососимметричность).
2) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (тождество Якоби).

Непосредственная проверка показывает, что если V — ассоциативая алгебра, то формула $[X,Y] = XY - YX$ задает в нем структуру алгебры Ли. Лемма 1 означает, что множество дифференцирований произвольной алгебры обладает структурой алгебры Ли; при этом оно не является ассоциативной алгеброй (а лишь подалгеброй Ли в ассоциативной алгебре линейных операторов), поскольку операторы XY и YX по отдельности — не дифференцирования.

Тем самым множество векторных полей на многообразии M является алгеброй Ли. Кроме того, оно является модулем над алгеброй $C^\infty(M)$: векторное поле можно умножить на функцию.

Лемма 2. *Пусть X, Y — векторные поля на M, $f \in C^\infty(M)$. Тогда $[fX,Y] = f[X,Y] - Y(f)X$.*

(второе слагаемое это векторное поле X, умноженное на функцию $Y(f)$).

Доказательство. В силу локальности утверждения достаточно рассмотреть $M = \mathbb{R}^n$; в силу билинейности достаточно рассмотреть $X = u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = v(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$. Из правила дифференцирования произведения вытекает, что $[f, \frac{\partial}{\partial x_i}] = \frac{\partial f}{\partial x_i}$; где под f и $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ подразумеваются операторы умножения на соответствующие функции.

Тогда $[fX,Y] = fu\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - v\frac{\partial(fu)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = f(u\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - v\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}) - uv\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = f[X,Y] - Y(f)X$. □

Пусть теперь $a \in U \subset M$, где (U,V,ϱ) — карта. Рассмотрим на M векторные поля X и Y, и пусть ξ_c и η_c — их интегральные кривые с началом в точке $c \in M$. При достаточно малых $t,s \in \mathbb{R}$ точки $a_1(t) = \xi_a(t)$, $a_2(t,s) = \eta_{a_1(t)}(s)$, $a_3(t,s) = \xi_{a_2(t,s)}(-t)$ и $a_4(t,s) = \eta_{a_3(t,s)}(-s)$ принадлежат окрестности U.

Теорема 1. *Координаты вектора $[X,Y](a) \in T_aM$ в системе координат ϱ равны $\left.\frac{\partial^2 x(a_4(t,s))}{\partial t \partial s}\right|_{t=s=0}$.*

Упражнение 1. Поскольку теорема локальная, достаточно рассмотреть случай $M = \mathbb{R}^n$ с координатами $p_1,\dots,p_n$ и $a = 0$. Тогда $a_1(t) = X(0)t + o(t)$, $a_2(t,s) = a_1(t) + Y(a_1(t))s + o(s) = X(0)t + Y(0)s + \sum_{i=1}^n X_i(0)\frac{\partial Y}{\partial p_i}(0)ts + o(t) + o(s) + o(ts)$, $a_3(t,s) = a_2(t,s) - X(a_2(t,s))t + o(t) = Y(0)s + \sum_{i=1}^n X_i(0)\frac{\partial Y}{\partial p_i}(0)ts - \sum_{i=1}^n Y_i(0)\frac{\partial X}{\partial p_i}(0)ts + o(t) + o(s) + o(ts)$ (член $X(0)t$ сократился, а член с t^2 поглощен $o(t)$), и $a_4(t,s) = a_3(t,s) - Y(a_3(t,s))s + o(s) = \sum_{i=1}^n (X_i(0)\frac{\partial Y}{\partial p_i}(0) - Y_i(0)\frac{\partial X}{\partial p_i}(0))ts + o(t) + o(s) + o(ts)$. Непосредственно из определения видно, что $a_4(t,0) = a_4(0,s) = a$ при всех t,s, откуда $\varrho(a_4(t,s)) = \varrho(a) + ts\mu(t,s,a)$, где μ — гладкая вектор-функция. Тем самым члены с $o(t)$ и $o(s)$ на самом деле отсутствуют, и получается $\frac{\partial^2 a_4(t,s)}{\partial t \partial s} = \sum_{i=1}^n (X_i(0)\frac{\partial Y}{\partial p_i}(0)ts - Y_i(0)\frac{\partial X}{\partial p_i}(0)) = [X,Y](0)$ (последнее равенство получается непосредственным вычислением).

Векторные поля X и Y называются коммутирующими, если $[X,Y] = 0$.

Теорема 2. *Векторные поля X и Y коммутируют тогда и только тогда, когда $\eta_{\xi_a(t)}(s) = \xi_{\eta_a(s)}(t)$ для любых достаточно малых t и s, где ξ и η — интегральные кривые полей X и Y.*

Следствие. *Векторные поля на компактном многообразии коммутируют тогда и только тогда, когда их потоки коммутируют.*

Доказательство. В одну сторону теорема сразу следует из теоремы 1. Обратно: пусть $[X,Y] = 0$; тогда в обозначениях теоремы 1 имеем $\varrho(a_4(t,s)) = \varrho(a) + o(ts)$, $t,s \to 0$. Поскольку отображение $(a,t) \mapsto \gamma_a(t)$ является гладким (по теореме существования и единственности из лекции 4), имеем $\varrho(\eta_{\xi_a(t)}(s)) - \varrho(\xi_{\eta_a(s)}(t)) =$

$o(ts)$ равномерно по $a \in K$, где $K \subset M$ — произвольный компакт; возьмем в качестве компакта множество $K = \{b \in U \mid |\varrho(b) - \varrho(a)| \le r\}$ при достаточно малом r. Выберем $\delta > 0$ такое, что при $|t|, |s| < \delta$ имеем $\eta_{\xi_a(t)}(s), \xi_{\eta_a(s)}(t) \in K$.

Зафиксируем t, s и рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$; тогда существует $N \gg 1$ такое, что $|\varrho(\eta_{\xi_a(t/N)}(s/N)) - \varrho(\xi_{\eta_a(s/N)}(t/N))| < \varepsilon/N^2$. Обозначим $a_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_{\xi_a(kt/N)}(ls/N)$ для всех $0 \le k, l \le N$. Тогда $d(a,t,s) \le \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} d(a_{kl}, t/N, s/N) < \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольная, а $d(a,t,s)$ от выбора N не зависит, получает $d(a,t,s) = 0$, что и требовалось. □

k-мерным распределением на многообразии M называется семейство k-мерных векторных подпространств $V_a \subset T_a M$, гладко зависящих от точки $a \in M$. Символом $\mathcal{T}(V)$ обозначим множество векторных полей X на M таких, что $X(a) \in V_a$ при всех $a \in M$. Очевидно, $\mathcal{T}(V)$ является идеалом в модуле векторных полей (над алгеброй $C^\infty(M)$).

Распределение V называется интегрируемым, если для каждой точки a существует k-мерное подмногообразие $\Gamma_a \subset M$ такое, что $a \in \Gamma_a$ и $V_b = T_b \Gamma_a$ для всякой точки $b \in \Gamma_a$.

Теорема 3 (теорема Фробениуса)**.** *Следующие три условия эквивалентны:*

1) *Распределение V интегрируемо.*
2) *Модуль $\mathcal{T}(V)$ замкнут относительно операции коммутирования.*
3) *Для всякой точки $a \in M$ существует ее окрестность U и в ней векторные поля $X_1, \dots, X_k$ такие, что $[X_i, X_j] = 0$ для всех i, j и $X_1(b), \dots, X_k(b)$ составляют базис в V_b для каждого $b \in U$.*

Лемма 3. *Пусть $f : M \to N$ — погружение многообразий размерностей m и n соответственно. Тогда для каждой точки $a \in M$ существует окрестность U такая, что $f|_U : U \to N$ — гладкое вложение, а его образ — m-мерное подмногообразие.*

Доказательство леммы — упражнение.

Доказательство теоремы 3. Если распределение V интегрируемо, то интегральная кривая γ_a любого поля $X \in \mathcal{T}(V)$ лежит в подмногообразии Γ_a. Из теоремы 1 вытекает теперь, что коммутатор двух полей из $\mathcal{T}(V)$ принадлежит $\mathcal{T}(V)$. Итак, $1 \Rightarrow 2$.

Пусть $\mathcal{T}(V)$ замкнут относительно коммутирования. Поскольку утверждения 1, 2 и 3 локальные, можно считать, что $M = \mathbb{R}^m$ и $a = 0$. Пусть поля $Y_1, \dots, Y_k$ таковы, что $Y_1(x), \dots, Y_k(x)$ — базис в V_x при всех x, близких к началу координат. Положим $Y_i = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$. Без ограничения общности матрица $U = (u_{ij}(x))_{i,j=1}^{k}$ невырождена при малых x. Пусть $U^{-1} = (v_{ij}(x))_{i,j=1}^{k}$; тогда $X_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{k} v_{ij} Y_j = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=k+1}^{m} w_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$. Поскольку поля $\frac{\partial}{\partial x_i}$ коммутируют друг с другом, $[X_p, X_q]$ будет содержать только члены, пропорциональные $\frac{\partial}{\partial x_j}$ с $j \ge k+1$. Но из замкнутости $\mathcal{T}(V)$ относительно коммутирования следует, что $[X_i, X_j] = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p(x) X_p = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p(x) \frac{\partial}{\partial x_p} + \sum_{p=k+1}^{m} \mu_p(x) \frac{\partial}{\partial x_p}$ для некоторых функций μ_p; отсюда $\lambda_p(x) = 0$ для всех p, и $[X_i, X_j] = 0$. Тем самым $2 \Rightarrow 3$.

Пусть теперь $X_1, \dots, X_k$ — поля, описанные в пункте 3, и $\xi_b^{(1)}, \dots, \xi_b^{(k)}$ — их интегральные траектории, проведенные через точку b и определеные при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ для $b \in U$. Определим отображение $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \to M$ формулой $\Phi(t_1, \dots, t_k) = \Phi_1(t_1) \circ \dots \Phi_k(t_k)$; здесь $\Phi_i(t)(b) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_b^{(i)}(t)$. Поскольку векторы $X_1(0), \dots, X_k(0)$ линейно независимы, отображение Φ является погружением по крайней мере для малых $\varepsilon > 0$ – следовательно, по лемме 3, для достаточно малых $\varepsilon > 0$ оно является вложением и его образ $\Gamma_a \subset M$ — k-мерное подмногообразие. Если $b = \Phi(t_1, \dots, t_k) \in \Gamma_a$, то $\xi_b^{(i)}(s) = \Phi(t_1, \dots, t_i + s, \dots, t_k) \in \Gamma_a$ в силу того, что потоки коммутирующих полей $X_1, \dots, X_k$ коммутируют. Следовательно, траектории полей X_i лежат на многообразиях Γ_a; следовательно, $V_b \subset T_b \Gamma_a$. Поскольку эти два пространства имеют одну и ту же размерность k, они совпадают. Таким образом, $3 \Rightarrow 1$, и теорема доказана. □