ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Теорема о решении дифференциального уравнения.

Сечением векторного расслоения $p : E \to B$ называется непрерывное отображение $\sigma : B \to E$, правое обратное к p: $p \circ \sigma = \mathrm{id}_B$. Иными словами, σ сопоставляет каждой точке $b \in B$ элемент слоя $p^{-1}(b) \subset E$ над нею. Гладкое сечение касательного расслоения $TM \to M$ называется векторным полем на многообразии M. Если пользоваться “геометрической” моделью касательного расслоения, то векторное поле это задание (с точностью до эквивалентности) для каждой точки $a \in M$ кривой $\gamma_a : \mathbb{R} \to M$, для которой $\gamma_a(0) = a$. В “алгебраической” модели для каждого a задан функционал $\ell_a : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию Лейбница в точке a. Иными словами, отображение $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, заданное формулой $(Xf)(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ell_a(f)$, линейно и удовлетворяет равенству $X(fg) = fX(g) + gX(f)$, то есть является дифференцированием алгебры $C^\infty(M)$.

Пусть $r > 0$. Кривая $\gamma : (-r, r) \to M$ называетяся интегральной кривой векторного поля X, если для любого $\tau \in (-r, r)$ кривая $\gamma_\tau(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma(t + \tau)$ представляет вектор $X(\gamma(\tau))$. В координатах y в карте $U \ni a$ это означает (проверьте!), что кривая γ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений $\dot{y}(\gamma(t)) = X(\gamma(t))$ (точка здесь и в дальнейшем — производная по t).

Лемма 1 (теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений)**.** *Пусть X — векторное поле на гладком многообразии M. Тогда для произвольной точки $a \in M$ существует окрестность $U \subset M$, $a \in U$, и число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $b \in U$ существует интегральная кривая $\gamma_b : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, для которой $\gamma_b(0) = b$. Кривая γ_b зависит от b гладко и единственна с точностью до замены области определения: если $\gamma_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to M$ и $\gamma_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to M$ — интегральные кривые с $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, и $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ для всех $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$.*

Доказательство. Поскольку утверждение локальное, достаточно разобрать случай $M = \mathbb{R}^n$. Тогда $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ — искомая интегральная кривая поля $X(y) = (X_1(y_1, \dots, y_n), \dots, X_n(y_1, \dots, y_n))$, если $\gamma(0) = b$ и $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ для достаточно малых t. Эта пара условий (называемая задачей Коши) эквивалентна тому, что $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, удовлетворяющая соотношению $\gamma(t) = a + \int_0^t X(\gamma(s))\, ds$ (опять же, для достаточно малых t). Действительно, $\gamma(0) = a$ очевидно. По теореме Ньютона–Лейбница правая часть соотношения имеет производную по t, равную $X(\gamma(t))$ — следовательно, $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$. Отсюда вытекает, что $X(\gamma(t))$ непрерывно дифференцируема, а правая часть соотношения имеет вторую непрерывную производную. Продолжая по индукции, заключаем, что γ — гладкая кривая.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и обозначим $\mathcal{F} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigl(C([-\varepsilon, \varepsilon])\bigr)^n$ — пространство наборов из n непрерывных функций на $[-\varepsilon, \varepsilon]$, с нормой $\|y\| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{i=1}^n \max_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |y_i(t)|$. Рассмотрим оператор $R : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, заданный правой частью соотношения: $R(\gamma)(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} a + \int_0^t X(\gamma(s))\, ds$. Возьмем достаточно малое $\delta > 0$, и пусть $B_\delta \subset \mathbb{R}^n$ — шар радиуса δ с центром в точке a. Отображение X непрерывно на компакте $\overline{B}_\delta$, поэтому ограничено: существует константа $L > 0$ такая, что $|X_i(y)| < L$ при всех i и любом $y \in B_\delta$. Пусть теперь $\mathcal{B}_\delta \subset \mathcal{F}$ — шар (в норме $\mathcal{F}$ радиуса δ с центром в функции $\alpha(t) \equiv a$. Тогда для произвольной функции $\mu \in \mathcal{B}_\delta$

$$\|R(\mu) - \alpha\|_{\mathcal{F}} \le \max_i \max_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \left| \int_0^t X_i(\mu(s))\, ds \right| \le \varepsilon \max_i \max_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |X_i(\mu(t))| \le L\varepsilon.$$

Таким образом, если $\varepsilon < \delta/L$, то оператор R переводит шар $\mathcal{B}_\delta$ в себя.

Гладкое отображение X, определенное на компакте $\overline{B}_\delta$, удовлетворяет т.наз. условию Липшица: существует константа $K > 0$ такая, что $\max_i |X_i(y_1, \dots, y_n) - X_i(z_1, \dots, z_n)| < K \max_i |y_i - z_i|$ для произвольных $y, z \in B_\delta$ (достаточно взять $K = n \max_{i,j} \max_{y \in B_\delta} |\frac{\partial X_i}{\partial y_j}(y)|$ и применить теорему Лагранжа о касательной и хорде — проделайте!). Тогда для произвольных $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{B}_\delta$ получим

$$\begin{aligned} \|R(\mu_1) - R(\mu_2)\|_{\mathcal{F}} &= \max_i \max_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \left| \int_0^t X(\mu_1(s)) - X(\mu_2(s))\, ds \right| \le \max_i \max_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |X(\mu_1(t)) - X(\mu_2(t)| \\ &\le K\varepsilon \max_i \max_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |(\mu_1)_i(t) - (\mu_2)_i(t)| = K\varepsilon\, \|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

Если $\varepsilon < 1/K$, оператор $R : \mathcal{B}_\delta \to \mathcal{B}_\delta$ — сжимающий. Поскольку пространство $\mathcal{F}$ полно, а шар $\mathcal{B}_\delta \subset \mathcal{F}$ замкнут (и, следовательно, тоже полон как метрическое пространство), оператор имеет единственную неподвижную точку. Гладкая зависимость от b очевидна. $\square$

Потоком (или гладкой однопараметрической группой диффеоморфизмов) на многообразии M называется гладкое отображение $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$, удовлетворяющее равенству $\Phi(t_1 + t_2, a) = \Phi(t_1, a) \circ \Phi(t_2, a)$ для всех $a \in M$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Отсюда вытекает, что $\Phi(0, a) = a$ для всех a и $\Phi(-t, \Phi(t, a)) = a$ для всех a и t — в частности, отображение $\Phi(t, \cdot) : M \to M$ является при любом t диффеоморфизмом. Иными словами, $t \mapsto \Phi(t, \cdot)$ — гладкий гомоморфизм группы вещественных чисел по сложению в группу диффеоморфизмов многообразия M.

Для произвольного потока Φ символом $\dot{\Phi}$ обозначается векторное поле на U такое, что вектор $\dot{\Phi}(a) \in T_aM$ для каждого $a \in U$ представляется кривой $\Phi(\cdot, a) : \mathbb{R} \to M$. Поскольку Φ — поток, тот же вектор представляется кривой $t \mapsto \gamma_{\Phi(\tau,a)}(t - \tau)$ для любого достаточно малого $\tau \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть X — векторное поле на компактном многообразии M. Тогда существует и единствен поток Φ, для которого $X = \dot{\Phi}$.*

Доказательство. Положим $\Phi(t, a) = \gamma_a(t)$, где γ_a — интегральная кривая поля X, существование которой утверждается в лемме 1. Покажем, что тем самым определено отображение $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$, т.е. что интегральная кривая на компактном многообразии глобально продолжаема.

Для каждого $a \in M$ обозначим $U_a \subset M$ открытое множество, существование которого доказано в лемме 1: при $b \in U_a$ интегральная кривая γ_b определена на интервале $(-\varepsilon_a, \varepsilon_a)$ при некотором $\varepsilon_a > 0$. Из покрытия M множествами U_a выберем конечное подпокрытие $U_{a_1}, \dots, U_{a_N}$, и пусть $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min(\varepsilon_{a_1}, \dots, \varepsilon_{a_N})$. Тогда при любом $b \in M$ интегральная кривая γ_b определена на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Пусть теперь T — точная верхняя грань множества $t > 0$ таких, что кривая γ_a определена на отрезке $[-t, t]$. Обозначим $b_1 = \gamma_a(T - \varepsilon/2)$, $b_2 = \gamma_a(-T + \varepsilon/2)$. Тогда кривые γ_{b_1} и γ_{b_2} определены на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, откуда в силу единственности интегральная кривая γ_a определена как минимум на интервале $(-T - \varepsilon/2, T + \varepsilon/2)$, что противоречит выбору T. Следовательно, $T = \infty$.

Отображение Φ — поток: если $b = \gamma_a(t_1)$, то $\gamma_b(t) = \gamma_a(t + t_1)$ в силу единственности интегральной кривой; поэтому $\Phi(t_1 + t_2, a) = \gamma_a(t_1 + t_2) = \gamma_{\Phi(t_1,a)}(t_2) = \Phi(t_2, \Phi(t_1, a))$. С другой стороны, если Φ — искомый поток (называемый интегральным), то для всякого $a \in M$ кривая $\gamma_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t, a)$ — интегральная, откуда вытекает единственность потока. $\square$

Пример 1. Если M некомпактно, то поток на всем M может не существовать; более того, может не существовать никакого $\varepsilon > 0$, для которого интегральная кривая γ_a определена на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ при всех a. Действительно, пусть $M = \mathbb{R}$, и $X(t) = t^2 \frac{\partial}{\partial t}$. Тогда интегральные кривые имеют вид $\gamma_a(t) = a/(1 - at)$ при $a \neq 0$ и $\gamma_0(t) = 0$. Кривая γ_a определена на интервале $(-1/a, 1/a)$, который может быть сколь угодно коротким.