ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Подмногообразия. Теорема о неявной функции. Векторные расслоения. Касательное расслоение. Производная гладкого отображения.

Пусть M — многообразие размерности m, и $n \le m$. Подмножество $N \subset M$ (с индуцированной топологией) называется подмногообразием (размерности n), если для каждой точки $a \in N$ в многообразии M существует такая карта (U, V, x), что $N \cap U = \{a \in U \mid x_{n+1}(a) = \dots = x_m(a) = 0\}$. Очевидно, N имеет стандартную структуру n-мерного многообразия: картой является $(U \cap N, p(V), (x_1, \dots, x_n))$; здесь $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — отображение, заданное формулой $p(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.

Замечание 1. Подмногообразие $N \subset M$ локально замкнуто: для каждой точки $a \in N$ существует открытое множество $U \subset M$ такое, что $a \in U$ и $U \cap N$ замкнуто в индуцированной топологии U.

Теорема 1 (теорема о неявной функции)**.** *Пусть M_1, M_2 — гладкие многообразия размерностей $m_1 \ge m_2$, $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение, и $b \in M_2$ — некритическое значение. Тогда подмножество $f^{-1}(b) \subset M_1$ является подмногообразием размерности $m_2 - m_1$.*

Доказательство. Пусть $f(a) = b$. Зафиксируем карты (U_1, V_1, x) на M_1 и (U_2, V_2, y) на M_2 такие, что $a \in U_1$, $b \in U_2$ и (для удобства) $x(a) = 0, y(b) = 0$. Запишем отображение f в координатах x, y: $F = y \circ f \circ x^{-1} : V_1 \to V_2$. Поскольку b — некритическое значение, $\operatorname{rk} F'(0) = m_2$; таким образом, в $m_1 \times m_2$-матрице $F'(0)$ можно найти m_2 линейно независимых строк — пусть, для определенности, это строки с номерами от 1 до m_2 — а остальные $m_1 - m_2$ строк выражаются через них. Тогда по обычной теореме о неявной функции существуют такие функции $u_1, \dots, u_{m_2}$ от $m_1 - m_2$ переменных, что $x_i(c) = u_i(x_{m_2+1}(c), \dots, x_{m_1}(c))$ для $i = 1, \dots, m_2$ и произвольной точки $c \in U$ такой, что $f(c) = b$. Введем теперь в U систему координат $z_1, \dots, z_{m_1}$, где $z_i = x_i$ при $i = m_2 + 1, \dots, m_1$ и $z_i(c) = x_i(c) - u_i(x_{m_2+1}(c), \dots, x_{m_1}(c))$ для $i = 1, \dots, m_2$. Теорема доказана. □

Пример 1. Из теоремы о неявной функции следует, в частности, что прообраз любого значения при субмерсии является подмногообразием. Напротив, образ многообразия при иммерсии подмногообразием может не быть — примером является любая плоская кривая с самопересечением.

Гладким вложением многообразий называется иммерсия, переводящая различные точки в различные. Образ многообразия при гладком вложении тоже может не быть подмногообразием: пусть $M = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ — двумерный тор. Он является двумерным многообразием (докажите!); естественная проекция $h : \mathbb{R}^2 \to M$ — гладкое отображение. Отображение $g : \mathbb{R} \to M$, где $g = h \circ r_a$, и $r_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — линейное отображение $r_a(t) = (t, at)$, является иммерсией при любом $a \in \mathbb{R}$. Если $a = p/q \in \mathbb{Q}$, это отображение не является вложением: $g(q) = g(0) = 0$ ((p, q)-обмотка тора); образ его, тем не менее, является одномерным подмногообразием и гомеоморфен S^1 (докажите!). Если $a \notin \mathbb{Q}$, отображение g, напротив, — гладкое вложение, но образ $g(\mathbb{R}) \subset M$ плотен в M (иррациональная обмотка тора) — следовательно, согласно замечанию 1, не является подмногообразием.

С каждым m-мерным гладким многообразием M можно каноническим образом связать многообразие TM размерности $2m$ и гладкое отображение $\xi : TM \to M$. Существуют несколько конструкций TM и ξ; начнем с геометрической.

Рассмотрим множество всех гладких отображений $\gamma : \mathbb{R} \to M$ (гладких кривых на многообразии M); назовем отображения γ_1 и γ_2 эквивалентными, если $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ и для какой-нибудь (и, следовательно, для любой) карты (U, V, x) такой, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \in U$, имеет место равенство $x(\gamma_1(t)) - x(\gamma_2(t)) = o(t)$ при $t \to 0$. Фактор-пространство множества гладких кривых по этому отношению эквивалентности и есть TM; отображение $\xi : TM \to M$ действует по формуле $\xi(\gamma) = \gamma(0)$.

Структуру гладкого многообразия на M можно ввести следующим образом. Пусть (U, V, x) — карта на M. Ей соответствует карта $(\tilde{U}, V \times \mathbb{R}^m, J_x)$ на TM, где $\tilde{U}$ — множество классов эквивалентности кривых γ, для которых $\gamma(0) \in U$, а $J_x : \tilde{U} \to V \times \mathbb{R}^m$ задано равенством $J_x(\gamma) = (x(\gamma(0)), x(\gamma(t))'|_{t=0})$; здесь штрих обозначает производную функции $x(\gamma(t))$ по переменной t. Из формулы Тейлора (порядка 1) следует, что определение корректно — для эквивалентных кривых координаты совпадают — и действительно задает координаты (если $J_x(\gamma_1) = J_x(\gamma_2)$, то кривые γ_1 и γ_2 эквивалентны).

Докажем, что областью значений координат действительно является $V \times \mathbb{R}^m$. Зафиксируем $a \in U$; поскольку V открыто, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x(a)) \subset V$, где $B_\varepsilon(x(a))$ — шар радиуса ε с центром в $x(a) \in V$. Для произвольного $v \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим кривую $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, заданную равенством

$\tilde\gamma(t) = x(a) + \frac{2v\varepsilon}{\pi|v|}\operatorname{arctg}(\pi|v|t/\varepsilon)$. Очевидно, образ кривой $\tilde\gamma$ целиком лежит в $B_\varepsilon(x(a)) \subset V$, поэтому кривая $\gamma = x^{-1}\circ\tilde\gamma$ определена. Очевидно, $J_x(\gamma) = (x(a), v)$, откуда вытекает требуемое.

Если $\varphi = x_2 \circ x_1^{-1}$ — отображение перехода от карты (U_1, V_1, x_1) к карте (U_2, V_2, x_2) на M (в явном виде $\varphi(s) = (\varphi_1(s_1,\dots,s_m),\dots,\varphi_m(s_1,\dots,s_m)))$, то отображение перехода между соответствующими картами на TM имеет вид $J_\varphi(s,v) = (\varphi(s), \varphi'(s)v)$; здесь $s \in V_1$, $v \in \mathbb{R}^m$, и $\varphi'(s) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор с матрицей $\frac{\partial\varphi_i}{\partial s_j}(s)$.

Топология в TM получается с помощью процедуры, описанной в лекции 1 — склеиванием карт. Непосредственно из определения видно, что отображение $\xi : TM \to M$ является непрерывным (и гладким). Отсюда вытекает, что пространство TM хаусдорфово. Действительно, пусть $a_1 \ne a_2$. Если $\xi(a_1) \ne \xi(a_2)$, то существуют открытые множества $A_1, A_2 \subset M$ такие, что $\xi(a_1) \in A_1$, $\xi(a_2) \in A_2$ и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Тогда $\xi^{-1}(A_1), \xi^{-1}(A_2) \subset TM$ — непересекающиеся открытые множества, содержащие a_1 и a_2. Если же $\xi(a_1) = \xi(a_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} b$, то, как доказано выше, если $U \ni b$ — карта, то $\xi^{-1}(U) \subset TM$ гомеоморфно $U \times \mathbb{R}^m$, и поэтому также существуют непересекающиеся открытые множества, содержащие a_1 и a_2. Аналогично доказывается наличие у TM счетной базы: она получается прямым произведением счетной базы тривиализующих окрестностей в M и счетной базы в $\mathbb{R}^m$.

Следовательно, TM — многообразие размерности $2m$.

Пусть X — топологическое пространство. Векторным расслоением ранга k с базой X называется тройка (X, Y, p), где Y — топологическое пространство, $p : Y \to X$ — непрерывное отображение, и для произвольной точки $a \in X$ существует открытое множество $U \subset X$, $a \in U$ (называемое тривиализующей окрестностью a) и непрерывное отображение $\psi : p^{-1}(U) \to \mathbb{R}^k$ (тривиализация) такое, что

1) Отображение $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, заданное равенством $\Psi(v) = (p(v), \psi(v))$, является гомеоморфизмом. Отсюда, в частности, вытекает, что отображение $\psi_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi|_{p^{-1}(a)} : p^{-1}(a) \to \mathbb{R}^k$ взаимно однозначно.
2) Если $a \in U_1 \cap U_2$, и ψ_1, ψ_2 — соответствующие тривиализации, то отображение $R_{12}(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\psi_2)_a \circ (\psi_1)_a^{-1} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ (отображение перехода) — обратимый линейный оператор.

Прообраз $p^{-1}(a) \subset Y$ произвольной точки $a \in X$ (слой векторного расслоения) имеет структуру векторного пространства: если $p(v_1) = p(v_2) = a$, и $U \ni a$ — тривиализующая окрестность с тривиализацией ψ, то положим по определению $t_1v_1 + t_2v_2 = \psi_a^{-1}(t_1\psi_a(v_1) + t_2\psi_a(v_2))$ для любых констант $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. От выбора тривиализации результат не зависит, поскольку отображение перехода между тривиализациями линейно. Размерность пространства $p^{-1}(a)$ равна k; базис в нем составляют векторы $\psi_a^{-1}(e_i)$, где $e_1, \dots, e_k$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^k$. Если в окрестности a имеются две тривиализации, то $R_{12}(a)$ — матрица перехода между соответствующими базисами.

Сечением векторного расслоения называется непрерывное отображение $\sigma : X \to Y$ такое, что $p \circ \sigma = \mathrm{id}_X$. Тем самым тривиализация ψ эквивалентна наличию k сечений $\varepsilon_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi^{-1}(e_i)$, $i = 1, \dots, k$, определенных в тривиализующей окрестности U и таких, что при каждом $a \in U$ векторы $\varepsilon_i(a)$ образуют базис в $p^{-1}(a)$.

Векторное расслоение называется тривиальным, если на нем существует тривиализация, тривиализующая окрестность которого — вся база X.

Пример 2. Для всякого m-мерного многообразия M тройка (M, TM, ξ) представляет собой векторное расслоение ранга m. Слой $T_aM \stackrel{\mathrm{def}}{=} \xi^{-1}(a)$ над точкой a состоит из всех кривых, с точностью до эквивалентности, для которых $\gamma(0) = a$. Каждому набору координат $x_1, \dots, x_m$ в карте $U \ni a$ соответствует базис в пространстве T_aM, обозначаемый $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(a)$: вектор $\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$ есть $J_x^{-1}(a, e_i) \in U \times \mathbb{R}^m$, где $e_1, \dots, e_m$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$.

Пример 3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — m-мерное подмногообразие. Очевидно, кривые $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to M$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} a$ и $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ (как векторы в $\mathbb{R}^n$). Тем самым T_aM — векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов $\gamma'(0)$ для всевозможных кривых γ. Аффинное подпространство, проходящее через a и параллельное T_aM, состоит из точек $a + \gamma'(0)t$ для всевозможных γ таких, что $\gamma(0) = a$. Поскольку $\gamma(t) = a + \gamma'(0)t + o(t)$, это подпространство наилучшим образом приближает подмногообразие M в окрестности точки a: у всякой точки $v \in a + T_aM$ найдется кривая γ на M такая, что $vt - \gamma(t) = o(t)$.

Морфизмом векторных расслоений $p_1 : Y_1 \to X_1$ и $p_2 : Y_2 \to X_2$ (рангов k_1 и k_2) называется пара непрерывных отображений (f, g), где $f : X_1 \to X_2$ и $g : Y_1 \to Y_2$, выполнено равенство $p_2 \circ g = f \circ p_1$, и отображение $g|_{p_1^{-1}(a)} : p_1^{-1}(a) \to p_2^{-1}(f(a))$ — линейное. Композиция морфизмов определяется очевидным образом; векторные расслоения и их морфизмы образуют категорию.

Мы сопоставим произвольному гладкому отображению $f : M_1 \to M_2$ морфизм векторных расслоений (f, f'), где $f' : TM_1 \to TM_2$ определяется следующим образом: классу эквивалентности кривой γ на M_1 соответствует класс эквивалентности кривой $f \circ \gamma$ на M_2. Пусть $\gamma(0) = a$, $f(a) = b$, (U, V, x) — координаты в окрестности a, $(\tilde U, \tilde V, y)$ — координаты в окрестности b. Если $J_x(\gamma) = (x(a), v) \in V \times \mathbb{R}^{m_1}$, то

$J_y(f \circ \gamma) = (F(x(a)), F'(x(a))v)$; здесь $F = y \circ f \circ x^{-1} = (F_1(s_1. \dots, s_{m_1}), \dots, F_{m_2}(s_1. \dots, s_{m_1}))$ — координатная запись отображения f, а $F'(x(a))$ — матрица $m_1 \times m_2$, матричный элемент которой с индексами i, j равен $\frac{\partial F_i}{\partial s_j}(x(a))$. Умножение матрицы на вектор — линейная операция, так что это действительно морфизм векторных расслоений. Этот морфизм называется производной гладкого отображения f.

Из формулы дифференцирования композиции вытекает, что $(F \circ G)' = F' \circ G'$, то есть переход к касательному расслоению и касательному отображению — функтор из категории многообразий в категорию (гладких) векторных расслоений.