ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Категория гладких многообразий.

Пример 1. Пусть $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$; обозначим $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_n)$. Символом $A_r(x)$ для произвольного $r > 0$ обозначается среднее r-ой степени: $A_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \bigl(\frac{1}{n}(|x_1|^r + \dots + |x_n|^r)\bigr)^{1/r}$.

Предложение. *Если $0 < p < q$, то $A_p(x) \le A_q(x)$ для любого x.*

Доказательство. Очевидно, $A_r(\lambda x) = \lambda A_r(x)$ для всех x, $r > 0$ и $\lambda > 0$. Тогда неравенство эквивалентно утверждению, что $A_p(x) \le 1$, где $x \in B_q \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n \mid A_q(y) = 1\}$.

Множество $B_q \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто и ограничено — следовательно, компактно. Пусть $x \in B_q$ — точка, в которой функция A_p достигает своего максимума. Эквивалентно, это точка, где достигает максимума функция $nA_p^p(x) = |x_1|^p + \dots + |x_n|^p$.

Если $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_q$, то по крайней мере одно из чисел x_i отлично от нуля (иначе $A_q(x) = 0$). Поскольку функции A_r не меняются при перестановках переменных и при смене знака любой из них, можно считать, что $x_1, \dots, x_s > 0$ и $x_{s+1} = \dots = x_n = 0$ для некоторого $s \ge 1$. Если точка $y = (y_1, \dots, y_n)$ достаточно близка к x, имеем $y_1 > 0$, то есть $y_1 = (1 - (y_2^q + \dots + y_n^q))^{1/q}$. При этом переменные $y_2, \dots, y_q$ принимают произвольные значения, достаточно близкие к $x_2, \dots, x_q$ (иными словами, $(y_2, \dots, y_q)$ лежит в некотором открытом подмножестве $\mathbb{R}^{n-1}$, содержащем $(x_2, \dots, x_q)$). Таким образом, $nA_p^p(y_1, \dots, y_n) = (1 - (y_2^q + \dots + y_n^q))^{p/q} + y_2^p + \dots + y_n^p \stackrel{\text{def}}{=} g(y_2, \dots, y_n)$.

Поскольку $(y_2, \dots, y_q)$ лежит в открытом множестве, и в точке $(x_2, \dots, x_n)$ функция g достигает своего максимума, имеем $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_2, \dots, x_n) = 0$ для всех $i = 2, \dots, n$. Иными словами, $-\frac{p}{q}(1 - (x_2^q + \dots + x_n^q))^{p/q-1} \cdot qx_i^{q-1} + px_i^{p-1} = 0 \Leftrightarrow x_1^{p-q} x_i^{q-1} = x_i^{p-1}$ при всех $i = 2, \dots, n$. Последнее равенство означает, что $x_i = 0$ или $x_i = x_1 \ne 0$. Таким образом, $x_1 = \dots = x_s$; из равенства $A_q(x) = 1$ вытекает, что $x_1 = \dots = x_s = (n/s)^{1/q}$. Теперь $A_p(x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0) = (n/s)^{(p-q)/pq} \le 1$ (поскольку $n/s \ge 1$, а $(p-q)/pq < 0$). □

Пример 2. Отметим на окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ диаметрально противоположные точки a и b и проведем в них (параллельные) касательные ℓ_a и ℓ_b. Теперь каждой точке $c \in S^1$ сопоставим два действительных числа: $\varrho_a(c)$ — расстояние (с соответствующим знаком) от a до точки пересечения $\ell_a \cap bc$, и $\varrho_b(c)$ — расстояние со знаком от b до точки пересечения $\ell_b \cap ac$. Число $\varrho_a(c)$ определено для всех $c \ne a$; при этом для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует и единственна точка $c \in S^1$ такая, что $\varrho_a(c) = \alpha$. Аналогично, $\varrho_b(c)$ определено для всех $c \ne b$, и $\forall \alpha \in \mathbb{R} \exists! c \in S^1 : \varrho_b(c) = \alpha$. Если диаметр окружности равен 1, то, как несложно увидеть, $\varrho_b(c) = 1/\varrho_a(c)$ для всех $c \ne a, b$ (т.е. всегда, когда оба числа определены).

Вещественной проективной прямой $\mathbb{R}P^1$ называется множество пар вида $[x : y]$, где хотя бы одно из чисел $x, y \in \mathbb{R}$ отлично от нуля, и пары $[x : y]$ и $[tx : ty]$ эквивалентны (представляют одну и ту же точку $\mathbb{R}P^1$) для любого $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для точки $[x : y] \in \mathbb{R}P^1$ определим числа $\mu_0([x : y]) = x/y$ и $\mu_1([x : y]) = y/x$. Числа определены корректно (т.е. не меняются при замене $[x : y]$ на $[tx : ty]$); первое — для всех точек $\mathbb{R}P^1$, кроме $[1 : 0]$, а второе — кроме $[0 : 1]$. Кроме того, для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ существует и единственна точка $[x : y] = [\alpha : 1] \in \mathbb{R}P^1$ такая, что $\mu_0([x : y]) = \alpha$, а также точка $[x : y] = [1 : \alpha]$ такая, что $\mu_1([x : y]) = \alpha$. Для всех $[x : y] \ne [1 : 0], [0 : 1]$ имеет место равенство $\mu_1([x : y]) = 1/\mu_0([x : y])$.

Определим взаимно однозначное отображение $S^1 \to \mathbb{R}P^1$ следующим образом: точке $c \in S^1$ сопоставим пару $[x : y] \in \mathbb{R}P^1$ такую, что $\varrho_a(c) = \mu_0([x : y])$ и/или $\varrho_b(c) = \mu_1([x : y])$. Очевидно, что если оба равенства возможны, то они определяют точку $[x : y]$ непротиворечиво и взаимно однозначно. Если имеет место только одно из них (а хотя бы одно имеет место всегда), то это тоже верно. Построенное отображение — гомеоморфизм топологических пространств (докажите!).

Упражнение 1. Докажите аналогичным образом, что комплексная проективная прямая гомеоморфна двумерной сфере.

Упражнение 2. Какие пары точек $\mathbb{R}P^1$ соответствуют диаметрально противоположным точкам на окружности? Какое преобразование $\mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$ соответствует отражению окружности относительно оси OX? относительно оси OY? повороту на угол φ вокруг центра? Какие преобразования окружности соответствуют проективным преобразованиям $\mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$?

Пусть M — топологическое пространство. m-мерной картой на M называется тройка (U, V, x), где $U \subset M$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества, а $x : U \to V$ — гомеоморфизм, называемый *системой координат*. m-мерным гладким атласом на M называется множество карт $\{(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha in A\}$ такое, что $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ и если (U_1, V_1, x_1) и (U_2, V_2, x_2) — две карты, и $U \stackrel{\text{def}}{=} U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, то *отображение перехода* $\varphi_{12} \stackrel{\text{def}}{=} x_2 \circ x_1^{-1} : W_1 \to W_2$, где $W_1 \stackrel{\text{def}}{=} x_1(U)$, $W_2 \stackrel{\text{def}}{=} x_2(U)$, является бесконечно гладким (имеет непрерывные частные производные всех порядков). Два атласа называются эквивалентными, если их объединение — снова атлас (равносильное условие: отображение перехода между пересекающимися картами *разных* атласов гладкое). m-мерным гладким многообразием называется хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой, на котором задан класс эквивалентности атласов. Заметим, что отображение замены координат всегда обратимо и обратное $\varphi_{21} = x_2 \circ x_1^{-1}$ гладко.

Пример 3. Стандартная структура многообразия на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^m$: атлас состоит из одной карты U, $V = U$, система координат $x = \mathrm{id}$.

Пример 4. $M = S^m = \{(t_0, \dots, t_m) \mid t_0^2 + \dots + t_m^2 = 1\}$. Атлас состоит из двух карт: $U_1 = S^m \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ и $U_2 = S^m \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}$; $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^m$. Координаты $x^{(1)}(t_0, \dots, t_m) = (t_1/(1-t_0), \dots, t_m/(1-t_0))$ и $x^{(2)}(t_0, \dots, t_m) = (t_1/(1+t_0), \dots, t_m/(1+t_0))$. Это действительно системы координат: уравнение $x^{(1)}(t_0, \dots, t_m) = (y_1, \dots, y_m)$ имеет единственное решение $t_0 = (Y-1)/(Y+1), t_i = 2y_i/(Y+1)$, где $i = 1, \dots, m$ и $Y \stackrel{\text{def}}{=} y_1^2 + \dots + y_m^2$; для $x^{(2)}$ аналогично. Отображение перехода действует из $W_1 = \mathbb{R}^m \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ в $W_2 = W_1$ и задано формулами $\varphi_{12}(y_1, \dots, y_m) = (y_1/Y, \dots, y_m/Y)$.

Пример 5. В примере 2 окружность и проективная прямая $\mathbb{R}P^1$ — многообразия. Карты на S^1 это $U_a = S^1 \setminus \{a\}$, координата ϱ_a, $V_a = \mathbb{R}$ и $U_b = S^1 \setminus \{b\}$, координата ϱ_b; $V_b = \mathbb{R}$. Отображение перехода $1/y : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Карты на $\mathbb{R}P^1$ это $U_0 = \mathbb{R}P^1 \setminus \{[1:0]\}$, координата μ_0, $V_0 = \mathbb{R}$ и $U_1 = \mathbb{R}P^1 \setminus \{[0:1]\}$, координата μ_1, $V_1 = \mathbb{R}$. Отображение перехода то же самое, откуда и вытекает гомеоморфизм.

В примере 1 множество B_q — многообразие; координаты в окрестности точки максимума это $(x_2, \dots, x_n)$.

Пример 6. $M = \mathbb{R}P^m = (\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\})/(v \sim tv, \forall t \neq 0, v \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\})$. Карты $U_i = \{[t_0 : \dots : t_m] \mid t_i \neq 0\}$, $i = 0, \dots, m$. Система координат $x^{(i)} : U_i \to \mathbb{R}^m$ задана формулой $x^{(i)}([t_0 : \dots : t_m]) = (t_0/t_i, \dots, t_{i-1}/t_i, t_{i+1}/t_i, \dots, t_m/t_i)$. Это действительно системы координат: если $x^{(i)}([t_0 : \dots : t_m]) = (y_1, \dots, y_m)$, то $[t_0 : \dots : t_m] \sim [y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_m]$ определено однозначно. Отображения замены координат: $x^{(i)} \circ (x^{(j)})^{-1}(y_1, \dots, y_m) = (z_1, \dots, z_m)$, где в зависимости от i, j и k может быть либо $z_k = y_\ell/y_i$ (при $\ell = k$ или $\ell = k+1$), либо $z_k = 1/y_i$ (разберитесь подробнее, для каких именно i, j и k имеют место эти случаи). Отображения, очевидно, бесконечно гладкие.В частности, при $m = 1$ полученный атлас совпадает с парой функций μ_0, μ_1 из примера 2.

Пример 7. Обобщение предыдущего примера: пусть $M = G(n, k, \mathbb{R})$ — грассманиан, то есть множество, элементами которого являются k-мерные подпространства в $\mathbb{R}^n$. На грассманиане можно ввести структуру гладкого $k(n-k)$-мерного многообразия следующим образом. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Выберем k-элементное подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, 2 \dots, n\}$ и обозначим $U_{i_1, \dots, i_k} \subset G(n, k, \mathbb{R})$ множество подпространств $L \in G(n, k, \mathbb{R})$, в которых имеется базис $h_1, \dots, h_k$, где $h_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j$ и $(i_1, \dots, i_k)$-минор матрицы α_{ij} отличен от нуля. Поскольку матрица $(\alpha_{ij})_{1 \le i \le k}^{1 \le j \le n}$ имеет ранг k, объединение множеств $U_{i_1, \dots, i_k}$ есть весь грассманиан (а пересечение — плотное множество в нем).

Пусть $L \in U_{i_1, \dots, i_k}$ и $h_1, \dots, h_k$ — требуемый базис. Обозначим A_0 подматрицу α_{ij} со столбцами $(i_1, \dots, i_k)$-подматрицу и пусть $g_i = \sum_{j=1}^k r_{ij} h_j$, где $A_0^{-1} = (r_{ij})_{1 \le i, j e k}$. Тогда $g_s = e_{i_s} + \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \xi_{sj} e_j$. При этом базис g_s с таким свойством единствен: если в a имеется другой базис $\tilde{g}_s = e_{i_s} + \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \tilde{\xi}_{ij} e_j$, то, очевидно, $\tilde{g}_i = g_i$ (получается из разложения $\tilde{g}_i$ по базису g).

С другой стороны, для любой $k \times (n-k)$-матрицы ξ_{ij} можно рассмотреть подпространство $b \in U_{i_1, \dots, i_k}$, порожденное $g_s \stackrel{\text{def}}{=} e_{i_s} + \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}}^n \xi_{sj} e_j$, $1 \le s \le k$. Тем самым, ξ_{ij} являются координатами на многообразии Грассмана в карте $U_{i_1, \dots, i_k}$. Переход между разными координатами в пересечении карт задается, очевидно, рациональным (и, следовательно, гладким) преобразованием.

Пример 8. На топологическом пространстве $\{(x, y) \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ не существует структуры гладкого многообразия. Действительно, точка $(1, 0)$ имеет окрестность, гомеоморфную интервалу, поэтому если структура n-мерного многообразия существует, должно быть $n = 1$. С другой стороны, любая линейно связная окрестность точки $(0, 0)$ распадается на 4 компоненты связности при удалении из нее этой точки; нетрудно видеть, что в $\mathbb{R}^1$ нет открытых подмножеств с таким свойством.

Заметим, что топология на гладком многообразии полностью определяется набором карт и отображений перехода. Действительно, если дан набор открытых множеств $V \subset \mathbb{R}^n$ и для каждой пары V_1, V_2 задано гладкое обратимое отображение перехода $\varphi_{12} : V_1' \to V_2'$, где $V_1' \subset V_1$ и $V_2' \subset V_2$ — открытые подмножества (возможно, пустые), то топологическое пространство M можно определить так: рассмотрим $\mathcal{M}$ — дизъюнктное объединение всех V (с топологией дизъюнктного объединения). Введем на $\mathcal{M}$ отношение $\sim$: $a \sim b$, если $a \in V_1'$, $b \in V_2'$ и $b = \varphi_{12}(a)$. Топологическое пространство M есть фактор (т.е. множество классов эквивалентности) $\mathcal{M}$ по отношению $\sim$.

Напоминание. Если есть набор топологических пространств V_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то их дизъюнктное объединение $\sqcup_{\alpha in \mathfrak{A}} V_\alpha$ есть множество всевозможных пар (a, α), где $\alpha \in \mathfrak{A}$, а $a \in V_\alpha$. Топология на дизъюнктном объединении задается так: множество $U \subset \sqcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} V_\alpha$ открыто, если для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ множество $\{a \in V_\alpha \mid (a, \alpha) \in U\}$ открыто.

Если имеется топологическое пространство V и на нем отношение эквивалентности $\approx$, то множество $V/\approx$ классов эквивалентности наделяется фактор-топологией по следующему правилу: множество $\mathfrak{U} \subset V/\approx$ классов эквивалентности открыто, если их *объединение* (как подмножеств в V) открыто в топологии V)

Замечание. Гомеоморфизм $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ в примере 2 вытекает как раз из наличия приведенной выше конструкции: отображения перехода в $\mathbb{R}P^1$ и S^1 одинаковы, значит, многообразия гомеоморфны.

Таким образом, гладкое m-мерное многообразие можно определить как набор открытых подмножеств в $\mathbb{R}^m$ и диффеоморфизмов между их открытыми подмножествами. В этом случае нужно, однако, потребовать, чтобы топология, построенная по приведенному выше рецепту, оказалась хаусдорфовой (это может нарушиться при факторизации) и имела счетную базу (несмотря на то, что множество карт обычно несчетно).

Пример 9 (нарушение хаусдорфовости при факторизации). Введем на $\mathbb{R}$ следующее отношение эквивалентности: $x \approx y$ если либо $x = y = 0$, либо $x, y \neq 0$. Фактор $\mathbb{R}/\approx$ состоит из двух точек, 0 и a, с нехаусдорфовой топологией “связного двоеточия”: множество $\{a\}$ открыто, а $\{0\}$ — нет.

Пример 10 (нехаусдорфово “многообразие”). Рассмотрим атлас из двух карт: $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$, $V_1' = V_2' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varphi_{12} = \mathrm{id}$. Тогда “многообразие” M состоит из $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и еще двух точек, 0_1 и 0_2. Окрестности точек 0_1 и 0_2 всегда содержат их и какое-то множество $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$, $\varepsilon > 0$. Тем самым у 0_1 и 0_2 нет непересекающихся окрестностей.

Отображение $f : M_1 \to M_2$ двух гладких многообразий (не обязательно одинаковой размерности) называется гладким, если оно непрерывно и для любой карты $(U_1, V_1, x^{(1)})$ на M_1 и любой карты $(U_2, V_2, x^{(2)})$ на M_2 отображение $x^{(2)} \circ f \circ (x^{(1)})^{-1} : W_1 \to W_2$, где $W_1 = x^{(1)}(f^{-1}(U_2) \cap U_1)$ и $W_2 = x^{(2)}(f(f^{-1}(U_2) \cap U_1))$, является гладким. Отображение $x^{(2)} \circ f \circ (x^{(1)})^{-1}$ называется записью отображения f в координатах $x^{(1)}, x^{(2)}$.

Гладкое отображение $M \to \mathbb{R}$ называется гладкой функцией на M.

Очевидно, композиция двух гладких отображений гладка, так что гладкие многообразия и гладкие отображения образуют категорию.

Пример 11. Отображение $S^1 \to \mathbb{R}P^1$, построенное в примере 2, является гладким, взаимно однозначным, и обратное к нему тоже гладкое. Такие отображения многообразий называются диффеоморфизмами.

Пусть $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение многообразий размерности m_1 и m_2 соответственно, и $a \in M_1$. Пусть $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ — координаты в картах $U_1 \ni a$ и $U_2 \ni f(a)$ соответственно. Тогда $F = x^{(2)} \circ f \circ (x^{(1)})^{-1} : V_1 \to V_2$ — запись f в координатах; здесь $V_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ и $V_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ — открытые множества. Если $x^{(1)}(a) = (a_1, \dots, a_{m_1})$, то можно написать $F(a) = (F_1(a_1, \dots, a_{m_1}), \dots, F_{m_2}(a_1, \dots, a_{m_1}))$.

Рассмотрим матрицу $F'(x^{(1)}(a)) = \frac{\partial F_i}{\partial a_j}(a)$ размера $m_1 \times m_2$. Введем в картах U_1, U_2 другие координаты $y^{(1)} = \varphi_1 \circ x^{(1)}$ и $y^{(2)} = \varphi_2 \circ x^{(2)}$, где $\varphi_1 : V_1 \to V_1'$ и $\varphi_2 : V_2 \to V_2'$ — отображения замены координат. Тогда $\tilde{F} = \varphi_1 \circ F \circ \varphi_2^{-1}$ — запись f в координатах $y^{(1)}, y^{(2)}$, и $\tilde{F}'(y^{(1)}(a)) = \varphi_1' \circ F'(x^{(1)}(a)) \circ \varphi_2'^{-1}$. Матрицы $F'(x^{(1)}(a))$ и $\tilde{F}'(y^{(1)}(a))$ отличаются умножением на обратимые матрицы справа и слева и, следовательно, имеют одинаковый ранг. Таким образом, $\operatorname{rk} F'(x^{(1)}(a))$ зависит только от отображения f и точки a; он называется рангом производной отображения f в точке a и обозначается $\operatorname{rk} f'(a)$.

Очевидно, $\operatorname{rk} f'(a) \leq \min(m_1, m_2)$. Если неравенство строгое, то точка $a \in M_1$ называется критической, а точка $f(a) \in M_2$ — критическим значением. Если $\operatorname{rk} f'(a) = m_1$ для всех $a \in M_1$, то отображение f называется погружением (или иммерсией); если $\operatorname{rk} f'(a) = m_2$ для всех $a \in M_1$, то субмерсией. Очевидно, иммерсии существуют только при $m_1 \leq m_2$, а субмерсии при $m_1 \geq m_2$.

Пример 12. Иммерсия $S^1 \to M$ называется гладкой замкнутой кривой в M. Если $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, то точка, в которой $f'(a) = 0$, называется критической. Субмерсия $M \to \mathbb{R}$ это функция без критических точек.