

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 6

11 октября 2013 года

1. Докажите, что если ряд  $\sum a_n$  сходится, то  $a_n \rightarrow 0$ . Верно ли обратное?
2. При каких значениях параметров сходятся ряды  $\sum q^n$ ;  $\sum \frac{1}{z^n}$ .
3. Докажите, что
  - (а) ряд  $\sum \frac{1}{n^2}$  сходится;
  - (б) ряд  $\sum \frac{1}{n}$  расходится;
  - (в) при каких  $\alpha$  сходится ряд  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  ?
4. Сходятся ли ряды
  - (а)  $\sum \frac{n^2-10n+1}{n^3+17n}$ ,  $\sum \frac{n^3}{n^5-17}$ ;
  - (б\*)  $\sum \frac{1}{n \ln n}$ ,  $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ ,  $\sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ ?
5. Докажите **критерий Даламбера**: пусть существует предел  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ . Тогда при  $q > 1$  ряд  $\sum a_n$  расходится, при  $q < 1$  — сходится.
6. Докажите **критерий Коши**: пусть существует предел  $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ . Тогда при  $q > 1$  ряд  $\sum a_n$  расходится, при  $q < 1$  — сходится.
7. Докажите, что следующий ряд сходится и найдите его сумму

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots$$

Переставьте члены ряда так, чтобы полученный ряд сходил к 7.

**Определение.** Ряд  $\sum a_n$  называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд  $\sum |a_n|$ .

8. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.
9. Докажите, что при любой перестановке членов абсолютно сходящегося ряда его сумма не меняется.
10. Докажите следующую **теорему Римана**: если ряд сходится, но не абсолютно (говорят, *условно*), то можно переставить его члены так, чтобы полученный ряд сходил к любому наперед заданному числу.
11. Сходится ли, а если да, то абсолютно или нет ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ ?
12. Докажите, что абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать,  $(\sum a_n)(\sum b_m) = \sum a_n b_m$ . Что означает запись  $\sum a_n b_m$ ? В каком порядке суммировать эту двухиндексную последовательность чисел?
13. Перемножьте следующие ряды

$$(1 + x + x^2 + \dots)^2,$$

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \dots\right).$$

Постарайтесь догадаться, чему равна сумма ряда  $\sum \frac{x^n}{n!}$ .