Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 4

27 сентября 2013 года

1. В каких точках непрерывны функции: $\sin\frac{1}{x}$; $x\sin\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}\sin x$; $(-1)^{[1/x]}$; $\frac{1}{[1/x]}$.

2. Опишите все непрерывные функции на прямой, удовлетворяющие тождеству

$$\text{а) } \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y); \qquad \text{б) } \psi(x+y) = \psi(x)\,\psi(y).$$

3. Рассмотрим следующие теоремы о множестве действительных чисел:

   - теорему о существовании точной верхней грани ограниченного множества;
   - теорему о существовании общей точки у системы вложенных отрезков;
   - теорему о существовании у ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности;
   - теорему о существовании у покрытия отрезка интервалами конечного подпокрытия.

   Рассмотрим следующие свойства функции f, непрерывной на отрезке $[a,b]$:

   - функция ограничена;
   - функция достигает своего максимума;
   - если $f(a) < 0 < f(b)$, то $f(x) = 0$ для некоторого $x \in [a,b]$;
   - функция равномерно непрерывна:
     $\forall\varepsilon{>}0\ \exists\delta{>}0 : \forall x,y{\in}[a,b]\ |x-y|{<}\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|{<}\varepsilon$.

   (а) (Слабая формулировка.) Докажите приведенные свойства непрерывной функции.
   (б) (Сильная формулировка.) Выведите каждое из приведенных свойств непрерывной функции из каждой приведенной теоремы о действительных числах (этот пункт включает $4 \times 4 = 16$ задач).

4. Дайте три определения непрерывного отображения метрических пространств (по аналогии с определениями непрерывной функции) и докажите их эквивалентность.

   Отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда полный прообраз любого открытого множества открыт.
   Определение. Метрическое пространство M называется *линейно связным*, если для любых двух точек $a, b \in M$ существует непрерывное отображение $f : [0,1] \to M$, такое, что $f(0) = a$, $f(1) = b$.
   Пространство M называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух непересекающихся непустых открытых подмножеств. Иными словами, если единственными подмножествами, являющимися одновременно открытыми и замкнутыми, являются M и $\emptyset$.

5. Докажите, что отрезок является связным и линейно связным.

6. Докажите, что линейно связное пространство связно.

7. Опишите все связные подмножества а) прямой $\mathbb{R}$; б) пространства $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел.

8. Пусть $Ж \subset \mathbb{R}^2$ есть объединение графика функции $y = \sin 1/x$ и отрезка $x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1$. Покажите, что $Ж$ является связным, но не линейно связным пространством.

9. Докажите, что непрерывная функция на связном пространстве принимает все промежуточные значения.

10. Докажите, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

    Имеется следующие три определения компактности (из которых основным является последнее): пространство M *компактно*, если
    (а) M есть замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$;
    (б) из любой последовательность точек в M можно выбрать сходящуюся подпоследовательность;
    (в) из любого покрытия M открытыми подмножествами можно выбрать конечное подпокрытие.

11. Докажите, что в) $\Rightarrow$ б). Докажите, что для подмножеств в $\mathbb{R}^n$ все три определения равносильны.

12. Докажите, что непрерывная функция на компактном пространстве
    (а) ограниченна;
    (б) достигает максимума и минимума;
    (в) равномерно непрерывна.

13. Докажите, что если непрерывное отображение компактного пространства взаимно однозначно, то обратное отображение, заданное на образе исходного, также непрерывно.