Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 2

13 сентября 2013 года

Определение *ε-окрестностью* точки a называется множество точек $U_\varepsilon(a) = \{x | a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$. Точка a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$ (обозначение: $a = \lim a_n$), если для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого, находятся в ε-окрестности точки a.

1. Сформулируйте, что означает, что число a *не* является пределом последовательности $\{a_n\}$. Докажите, что 1 не является пределом последовательности $\frac{1}{n}$.

2. Докажите, что у последовательности не может быть больше одного предела.

Определение. Последовательность a_n называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n, m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$.

3. Докажите, что всякая последовательность, имеющая предел, фундаментальна.

4. Приведите пример фундаментальной последовательности на множестве рациональных чисел, не имеющей предела.

Аксиома полноты в множестве действительных чисел.
1) *Любая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.*
2) *Любая фундаментальная последовательность имеет предел.*
3) *Любая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.*
4) *Любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.*

5. Докажите, что эти формулировки аксиомы полноты эквивалентны между собой.

6. Докажите, что ваша любимая модель действительных чисел удовлетворяет аксиоме полноты.

Определение. *Предельной точкой множества* называется точка, в любой ε-окрестности которой имеются элементы этого множества. *Предельной точкой последовательности* называется точка в любой ε-окрестности которой содержится бесконечное число ее членов.

7. Докажите, что предел сходящейся последовательности является единственной ее предельной точкой.

8. Докажите, что у любой последовательности точек отрезка $[0, 1]$ имеется предельная точка.

9. Найдите предельные точки множеств
а) $\frac{(2+(-1)^n)}{n}$; б) $\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} | \ m, n \in \mathbb{N}\}$; в) $\{\sin n\}$.

10. Выясните, какие из следующих последовательностей имеют пределы, и (для пунктов а-ж) найдите эти пределы.

а) $(n+1)^{100}/(n^{100}+1)$;

б) $n^{100}/2^n$;

в) $a^{1/n}$;

г) $n!/n^n$;

д) $\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n+4^n}{5^n+6^n}}$;

е) $\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}$;

ж) $\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$;

з) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$;

и) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$;

к) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\pm\frac{1}{n}$.