Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс 6 сентября 2013 года

1. Докажите *неравенство Бернулли*:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad (n \ - \ \text{натуральное}, x \geqslant -1).$$

2. Укажите такое натуральное $n > 1$, что $2^n > n^{1000}$.

3. Укажите такое натуральное n, что $1,0001^n > 1000000$.

4. Докажите, что $\sqrt[100]{2} < 1,01$.

5. При каком натуральном k величина $\frac{k^2}{1{,}001^k}$ максимальна?

   Определение. *Отношением* на множестве M называется подмножество множества пар $M \times M$. Отношение $R \subset M \times M$ называется *отношением эквивалентности*, если оно

   - *симметрично*, т.е. $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$;
   - *транзитивно*, т.е. $(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$;
   - *рефлексивно*, т.е. $(x, x) \in R \quad \forall x \in M$.

   Множество попарно эквивалентных относительно R элементов множества M называется *классом эквивалентности.*

6. Дайте определение рационального числа как класса эквивалентности. Определите операции над рациональными числами.

   Определение. *Рациональным числом* называется целочисленная прямая на плоскости, проходящая через начало координат и не совпадающая с осью ординат.

7. Докажите эквивалентность приведенного определения рационального числа вашему. Определите сложение и умножение целочисленных прямых.

8. Что такое $\sqrt{2}$?

9. Докажите, что $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррационально.

   (Доказательство: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1,41\dots + 1,73\dots = 3,14\dots$ – иррационально.)

10. Докажите, что сумма $a_1\sqrt{b_1} + \dots + a_k\sqrt{b_k}$ иррациональна, если a_i целые, а b_i различные положительные целые, свободные от квадратов.

11. Рационально ли число $\sin 20^o$?

12. Целочисленные точки на плоскости окружены кружками радиусом 10^{-10}. Докажите, что любая прямая, проходящая через начало координат, пересекает а) еще хотя бы один кружок; б) бесконечно много кружков.

13. Есть ли рациональные корни у многочленов а) $16 + 8x + 2x^2 + 2x^3 + x^4$; б) $6 + 2x^2 + 3x^3 + 6x^4$; в) $10 + 5x + 10x^2 + 2x^4$?

14. Докажите, что существуют два иррациональных числа a и b, такие что а) $a + b, ab$ рациональны; б) a^b рационально.

15. Докажите, что а) существует пара целых чисел m и n, такая что $|m - n\sqrt{2}| < 10^{-10}$; б) таких пар бесконечно много.

Цепные дроби.[1] Пары (m, n) из последней задачи дают приближение $\sqrt{2} \approx \frac{m}{n}$ с высокой точностью (порядка $\frac{1}{10^{10}n}$). Ниже описаны способы получения наилучших приближений иррациональных чисел рациональными.

Метод вбивания колышков. Изобразим число α (положительное, для определенности) лучом $y = \alpha x$ в первом квадранте плоскости. Отметим целые точки (k, n), $k, n \in \mathbb{Z}^+$. Обозначим через Γ^+ и Γ^- ломаные, являющиеся частями границ выпуклых оболочек множеств целых точек, расположенных выше и ниже луча соответственно (рисунок необходим). Занумеруем единой нумерацией вершины $u_k = (q_k, p_k)$ обеих ломаных, $u_{2k-1} \in \Gamma^-$, $u_{2k} \in \Gamma^+$.

16. Докажите, что числа p_k/q_k приближают α с ошибкой, не превышающей $1/(q_k)^2$.

Метод вытягивания носов. Мы строим последовательность параллелограммов, натянутых на векторы Ou_{k-1}, Ou_k. Вершина N с координатами $u_{k-1} + u_k$, противоположная вершине O, называется «носом». Начальный параллелограмм — единичный квадрат, $u_{-1} = (0, 1)$, $u_0 = (1, 0)$. Далее поступаем так: перемещаем отрезок $u_{k-1}N$ вдоль прямой, на которой он лежит, до тех пор, пока точка N не пересечет исходный луч, и еще немного, чтобы концы сдвинутого отрезка попали в целые точки. Начало сдвинутого отрезка обозначим через u_{k+1}. Это и задает новый параллелограмм.

17. Докажите, что полученные точки u_k — те же, что и в методе вбивания колышков.

18. Докажите, что все параллелограммы имеют одинаковую площадь 1. Выведите отсюда равенство $|p_k/q_k - p_{k+1}/q_{k+1}| = 1/(q_k q_{k+1})$, приводящее к той же оценке на порядок приближения числа α, что и выше.

Цепной дробью называется бесконечная дробь вида $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}}$, $a_i \in \mathbb{N}$ $(a_1 \geqslant 0)$.

19. Докажите, что каждое иррациональное число допускает единственное представление в виде бесконечной цепной дроби (цепная дробь конечна тогда и только тогда, когда она представляет рациональное число).

Если в бесконечной цепной дроби отбросить все члены, начиная с $(n+1)$-го, то получатся рациональные приближения исходного иррационального числа.

20. Докажите, что полученные рациональные приближения совпадают с приближениями, полученными методами вбивания колышков и вытягивания носов. Как при помощи этих методов определить числа a_k?

Пусть, например, $\alpha = \sqrt{2}$. Воспользовавшись многократно равенством $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, получаем

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

Таким образом, цепная дробь для числа $\sqrt{2}$ бесконечна, что дает альтернативное доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$.

21. Найдите разложение в цепную дробь чисел $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$.

В действительности, последовательность a_k коэффициентов разложения числа α в цепную дробь периодична, начиная с некоторого места, тогда и только тогда, когда число α представимо в виде $\alpha = a + \sqrt{b}$, где a и b рациональны, иными словами, когда α является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

---

[1] Изложенный ниже материал и задачи 15–21 факультативны. Больше о цепных дробях можно узнать из книг: В. И. Арнольд. Цепные дроби. - М.: МЦНМО, 2000; А. Я. Хинчин. Цепные дроби. - М.: ГИФМЛ, 1960.