# Листок 7. Функциональный интеграл в теории Клейна-Гордона

( Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **10.11.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu )

## ◯ 1. (40 баллов) Действие мировой линии и пропагатор Фейнмана

**(a). (10 баллов)** Классическое действие для релятивистской частицы массы $m$ дается произведением $m$ с собственным временем вдоль мировой линии частицы

$$S[x] = -m\int d\tau = -m\int_0^1 ds\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}, \tag{0.1}$$

где $\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial s}$. Такое релятивисткое действие мировой линии инвариантно относительно репараметризаций $s \to s'(s)$, где $s'(0) = 0$, $s'(1) = 1$, and $ds'/ds > 0$. Введем множитель Лагранжа $\lambda(s) > 0$. Покажите, что следующее действие

$$S[x,\lambda] = \frac{1}{2}\int_0^1 ds\left(\frac{\dot{x}^2(s)}{\lambda(s)} - m^2\lambda(s)\right) \tag{0.2}$$

классически эквивалентно ( — в итоге дает тоже самое уравнение движения для $x^\mu$ ) действию (0.1). (Подсказка: Исключите $\lambda(s)$ из уравнений движения.) Теперь в добавок, мы введем импульс $p_\mu$. Покажите, что

$$S[x,\lambda,p] = -\int_0^1 ds(\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{\lambda}{2}(p^2+m^2)) \tag{0.3}$$

классически эквивалентно действию (0.1).

**(b). (10 баллов)** Покажите, что действие (0.3) инвариантно относительно репараметризаций, если $\lambda(s)$ преобразуется определенным образом. Используя эту инвариантность, покажите, что можно фиксировать $\lambda(s) = \tau$, где $\tau > 0$ и не зависит от $s$.

Теперь мы определим пропагатор Фейнмана $G_F(x,y)$ как интеграл по путям из одной точки пространства $x$ в другую $y$:

$$G_F(x,y) = \int_x^y [dx]\int[d\lambda][dp]e^{\frac{i}{\hbar}S[x,\lambda,p]}. \tag{0.4}$$

**(c). (10 баллов)** Используя эквивалентность между инегралом по путям и Шредингеровской формулировкой квантовой механики, покажите, что

$$G_F(x,y) = \int_0^\infty d\tau\langle y|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau}|x\rangle, \tag{0.5}$$

с $\hat{H} = \hat{p}^2 + m^2$.

Интеграл по $\tau$, как мы уже знаем, называется интегралом Швингера по собственному времени. Чтобы сделать этот интеграл формально хорошо определенным — сходящимся, мы добаляем маленькую мнимую часть к Гамильтониану $\hat{H} \to \hat{H} - i\epsilon$.

**(d). (10 баллов)** Покажите, что это требование сходимости, по сути эквивалентно $i\epsilon$ прескрипции для пропагатора Фейнмана:

$$G_F(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+m^2-i\epsilon}. \tag{0.6}$$

## ◯ 2. (20 баллов) Сходимость теории возмущений в 0-мерной Квантовой теории поля (КТП)

Большое понимание КТП может быть получено из изучения интеграла

$$Z(j) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4!}x^4 + jx}, \tag{0.7}$$

где $\lambda \geqslant 0$ и $j \in \mathbb{R}$. Этот интеграл может рассматриваться как производящий функционал для Евклидовой КТП в $d=0$ пространстве времени. Заметим, что данный интеграл быстро сходится.

**(a). (10 баллов)** Положите $\lambda = 0$ и вычислите $Z(j)$ в этом случае. Используйте это, чтобы вычислить свободные "функции Грина":

$$\langle x^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\int dx e^{-\frac{1}{2}x^2}}, \tag{0.8}$$

где $n \geqslant 1$. Дайте интерпретацию результата в терминах диаграмм Фейнмана и покажите, что для $n = 2, 4, 6, 8$ функции Грина корректно даются их симметрийным фактором.

**(b). (10 баллов)** Теперь рассмотрим $Z(0)$ для $\lambda > 0$. Предполагая, что $\lambda$ достаточно мало, разложите $Z(0)$ по теории возмущений $Z(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Z_n$ и вычислите $Z_n$. Покажите, что $Z_n$ растет факториально с $n \to \infty$ и по этому теория возмущений (ряд Тейлора) имеет нулевой радиус сходимости. Объясните этот результат в терминах интегрального представления для $Z(0)$.

Казалось бы результат пункта $(b)$ является катастрофой для нашей уверенности в теории возмущений для КТП. На самом деле, такая ситуация закономерна и в Квантовой механике и в КТП, по причинам подобным тем, что мы наблюдали на нашем примере. Эта ситуация не безнадежна по двум причинам. Первая причина состоит в том, что теория возмущений все равно имеет смысл как асимптотическое разложение: покуда мы ограничиваем наше разложение до порядка $n \lesssim \lambda^{-1}$ в теории возмущений, пертурбативный ответ дает нам хорошее приближение к полному ответу. Вторая причина в том, что существуют разные методы (такие как преобразование Бореля), которые позволяют получить полный ответ из знания коэффициентов $Z_n$ теории возмущений, даже если такой ряд формально расходится.

## ◯ 3. (40 баллов) Уравнение Швингера-Дайсона и петлевое разложение

В интеграле по путям мы тоже можем интегрировать по частям. В этой задаче вы покажите, что это позволяет получить так называемые уравнения Швингера-Дайсона, которые утверждают, что классические уравнения движения выполняются внутри корреляционных функций, с точностью до контактных членов.

**(a). (10 баллов)** Для разминки, рассмотрите интеграл $I[J] = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-s(x)-Jx}$ с $s(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{4!}x^4$. Покажите, что $I[J]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(J + s'[-\frac{\partial}{\partial J}])I[J] = 0$. Это уравнение Швингера-Дайсона для интеграла $I[J]$ — игрушечной модели производящего функционала в КТП.

**(b). (10 баллов)** Теперь, рассмотрите статистическую сумму $Z[J] = \int [d\phi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi(x)] + \frac{i}{\hbar}\int d^d x\, J(x)\phi(x)}$, для взаимодействующей теории поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3, \tag{0.9}$$

с источником $J(x)$. Выведите уравнение Швингера-Дайсона для $Z[J]$.

Теперь возьмем оператор, среднее которого мы хотим найти, например произведение полей. Обозначим такой оператор $f[\phi]$. Определим среднее такого оператора $f[\phi]$ как

$$\langle f[\phi] \rangle = \frac{\int [d\phi] f[\phi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi]}}{\int [d\phi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi]}}. \tag{0.10}$$

**(c). (10 баллов)** Выведите следующее уравнение:

$$\left\langle \frac{\delta f[\phi]}{\delta \phi(x)} + \frac{i}{\hbar} f[\phi] \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \right\rangle = 0. \tag{0.11}$$

**(d). (10 баллов)** Рассмотрите разложение $Z[J]$ в терминах статистической суммы свободной теории $Z_0[J]$. Покажите, что такое разложение может быть записанно как ряд по $\hbar$. Также рассмотрите Z[0] как разложение по диаграммам Фейнмана. Покажите, что каждая связная диаграмма Фейнмана пропорциональна $\hbar^{L-1}$, где $L$ — количество петель в диаграмме (количество незафиксированных импульсов у пропагаторов). Чтобы показать это, изучите как зависят пропагаторы и вершины от $\hbar$. А затем покажите, что число петель $L$ в связной диаграмме Фейнмана связанно с количеством пропагаторов $P$ и вершин $V$ по формуле $L = P - V + 1$. (Подсказка: используйте то, что в каждой вершине должен выполняться закон сохранения импульса)