Листок 6. Поле Дирака

Решения

Все задачи в этом листке взяты из книги Пескина Шредера, глава 3.

◯ 1. (45 баллов) Представления группы Лоренца

(a). (15 баллов) Итак коммутационные соотношения для генераторов алгебры Лоренца:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}). \tag{0.1}$$

Определим генераторы поворотов и бустов по формулам

$$L^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk}, \quad K^i = J^{0i}, \tag{0.2}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$. Имеем ($i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$, $\epsilon^{123} = 1$):

$$\begin{aligned}
[L^i, L^j] &= \frac{1}{4}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}[J^{kl}, J^{mn}] = \frac{i}{4}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}(g^{lm}J^{kn} - g^{km}J^{ln} - g^{ln}J^{km} + g^{kn}J^{lm}) = \\
&= -\frac{i}{4}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}(\delta^{lm}J^{kn} - \delta^{km}J^{ln} - \delta^{ln}J^{km} + \delta^{kn}J^{lm}) = \\
&= -\frac{i}{4}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jln}J^{kn} + \frac{i}{4}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jkn}J^{ln} + \frac{i}{4}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jml}J^{km} - \frac{i}{4}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmk}J^{lm} = \\
&= \frac{i}{4}(\delta^{ij}\delta^{kn} - \delta^{in}\delta^{kj})J^{kn} + \frac{i}{4}(\delta^{ij}\delta^{ln} - \delta^{in}\delta^{lj})J^{ln} + \frac{i}{4}(\delta^{ij}\delta^{km} - \delta^{im}\delta^{kj})J^{km} - \frac{i}{4}(\delta^{lj}\delta^{im} - \delta^{lm}\delta^{ij})J^{lm} = \\
&= -\frac{i}{4}J^{ji} - \frac{i}{4}J^{ji} - \frac{i}{4}J^{ji} - \frac{i}{4}J^{ji} = iJ^{ij} = i\epsilon^{ijk}L^k.
\end{aligned} \tag{0.3}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
[L^i, K^j] &= \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}[J^{kl}, J^{0j}] = \frac{i}{2}\epsilon^{ikl}(g^{l0}J^{kj} - g^{k0}J^{lj} - g^{lj}J^{k0} + g^{kj}J^{l0}) = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}(\delta^{lj}J^{k0} - \delta^{kj}J^{l0}) = \frac{i}{2}\epsilon^{ikj}J^{k0} - \frac{i}{2}\epsilon^{ijl}J^{l0} = i\epsilon^{ijk}K^k,
\end{aligned} \tag{0.4}$$

а также

$$[K^i, K^j] = [J^{0i}, J^{0j}] = i(g^{i0}J^{0j} - g^{00}J^{ij} - g^{ij}J^{00} + g^{0j}J^{i0}) = -iJ^{ij} = -i\epsilon^{ijk}L^k. \tag{0.5}$$

Теперь для комбинаций

$$\boldsymbol{J}_+ = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + i\boldsymbol{K}), \quad \boldsymbol{J}_- = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} - i\boldsymbol{K}) \tag{0.6}$$

получаем:

$$\begin{aligned}
[J_+^i, J_+^j] &= \frac{1}{4}[L^i, L^j] + \frac{i}{4}[L^i, K^j] + \frac{i}{4}[K^i, L^j] - \frac{1}{4}[K^i, K^j] = \\
&= \frac{i}{4}\epsilon^{ijk}L^k - \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}K^k + \frac{1}{4}\epsilon^{jik}K^k + \frac{i}{4}\epsilon^{ijk}L^k = i\epsilon^{ijk}\frac{1}{2}(L^k + iK^k) = i\epsilon^{ijk}J_+^k \\
[J_-^i, J_-^j] &= \frac{1}{4}[L^i, L^j] - \frac{i}{4}[L^i, K^j] - \frac{i}{4}[K^i, L^j] - \frac{1}{4}[K^i, K^j] = \\
&= \frac{i}{4}\epsilon^{ijk}L^k + \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}K^k - \frac{1}{4}\epsilon^{jik}K^k + \frac{i}{4}\epsilon^{ijk}L^k = i\epsilon^{ijk}\frac{1}{2}(L^k - iK^k) = i\epsilon^{ijk}J_-^k.
\end{aligned} \tag{0.7}$$

И также

$$[J_+^i, J_-^j] = \frac{1}{4}[L^i, L^j] - \frac{i}{4}[L^i, K^j] + \frac{i}{4}[K^i, L^j] + \frac{1}{4}[K^i, K^j] =$$
$$= \frac{i}{4}\epsilon^{ijk}L^k + \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}K^k + \frac{1}{4}\epsilon^{jik}K^k - \frac{i}{4}\epsilon^{ijk}L^k = 0, \tag{0.8}$$

что и требовалось показать.

(b). (15 баллов) Конечномерные представления группы вращений нумеруются допустимыми значениям орбитального момента: целыми и полуцелыми числами. Из результата части **(a)** следуют, что все конечномерные представления группы Лоренца соответствуют парам целых или полуцелых чисел, (j_+, j_-), которые в свою очередь соответствуют паре представлений группы поворотов. Инфинитезимальное преобразование Лоренца ($\Phi \to e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}\Phi$) записывается, как

$$\Phi \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{L} - i\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{K})\Phi, \tag{0.9}$$

откуда, используя, что $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}_+ + \boldsymbol{J}_-$ и $\boldsymbol{K} = i(\boldsymbol{J}_- - \boldsymbol{J}_+)$, получим

$$\Phi \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot(\boldsymbol{J}_+ + \boldsymbol{J}_-) + \boldsymbol{\beta}\cdot(\boldsymbol{J}_- - \boldsymbol{J}_+))\Phi. \tag{0.10}$$

Далее для $\Phi_{(\frac{1}{2},0)}$ мы имеем $\boldsymbol{J}_+ = \boldsymbol{\sigma}/2,\ \boldsymbol{J}_- = 0$ откуда

$$\Phi_{(\frac{1}{2},0)} \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\Phi_{(\frac{1}{2},0)}, \tag{0.11}$$

для $\Phi_{(0,\frac{1}{2})}$ мы имеем $\boldsymbol{J}_- = \boldsymbol{\sigma}/2,\ \boldsymbol{J}_+ = 0$ откуда

$$\Phi_{(0,\frac{1}{2})} \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\Phi_{(0,\frac{1}{2})}, \tag{0.12}$$

что и есть в точности преобразования для ψ_L и ψ_R:

$$\psi_L \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_L, \quad \psi_R \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_R. \tag{0.13}$$

(c). (15 баллов) Тождество $\boldsymbol{\sigma}^T = -\sigma^2\boldsymbol{\sigma}\sigma^2$ позволяет переписать преобразование для ψ_L в эквивалентной форме

$$\psi' \to \psi'(1 + i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}), \tag{0.14}$$

где $\psi' = \psi_L^T\sigma^2$. Используя этот закон, мы можем записать объект, который преобразуется по представлению $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ как 2×2 матрица, которая преобразуется по закону ψ_R с левой стороны и одновременно преобразуется по закону транспонированного ψ_L с правой. Запишем эту матрицу в виде

$$\begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix}. \tag{0.15}$$

Вводя $\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ и $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma})$, можно записать данную матрицу, как $V^\mu\bar{\sigma}_\mu = g_{\mu\nu}V^\mu\bar{\sigma}^\nu = V^0\sigma^0 + V^i\sigma^i$, где $\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Далее, по условию, эта матрица преобразуется по формуле (мы пренебрегаем квадратичными слагаемыми по $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\theta}$):

$$\begin{aligned}
V^\mu \bar{\sigma}_\mu \to & (1 - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}) V^\mu \bar{\sigma}_\mu (1 + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}) = (1 + (\boldsymbol{\beta} - i\boldsymbol{\theta})\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}) V^\mu \bar{\sigma}_\mu (1 + (\boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\theta})\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}) = \\
& = V^\mu \bar{\sigma}_\mu + (\boldsymbol{\beta} - i\boldsymbol{\theta})\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} V^\mu \bar{\sigma}_\mu + V^\mu \bar{\sigma}_\mu (\boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\theta})\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = \\
& = V^\mu \bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{2} V^\mu \beta_i \{\sigma^i, \bar{\sigma}_\mu\} + \frac{i}{2} V^\mu \theta_i [\bar{\sigma}_\mu, \sigma^i] = \\
& = V^\mu \bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{2} V^\mu \beta_i (2\sigma^i \delta^0_\mu + 2\sigma^0 \delta^i_\mu) + \frac{i}{2} V^\mu \theta_i (2i\epsilon^{\mu i k}\sigma^k (1 - \delta^0_\mu)),
\end{aligned} \tag{0.16}$$

где $\epsilon^{123} = -\epsilon_{123} = 1$. В итоге получаем

$$V^\mu \bar{\sigma}_\mu \to V^\mu \bar{\sigma}_\mu + \beta_i (V^0 \sigma^i + V^i \sigma^0) + \theta_i V^j \epsilon^{ijk} \sigma^k, \tag{0.17}$$

далее используя, что $\beta_i = \omega_{0i}$, $\theta_i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega_{jk}$, получим

$$\begin{aligned}
V^\mu \bar{\sigma}_\mu \to & V^\mu \bar{\sigma}_\mu + \omega_{0i}(V^0 \sigma^i + V^i \sigma^0) + \frac{1}{2}\epsilon^{imn}\omega_{mn} V^j \epsilon^{ijk}\sigma^k = \\
& = V^\mu \bar{\sigma}_\mu + \omega_{0i}(V^0 \sigma^i + V^i \sigma^0) + \frac{1}{2}(\delta^{mj}\delta^{nk} - \delta^{mk}\delta^{nj})\omega_{mn} V^j \sigma^k = \\
& = V^\mu \bar{\sigma}_\mu + \omega_{0i}(V^0 \sigma^i + V^i \sigma^0) + \omega_{jk} V^j \sigma^k = \\
& = V^\mu \bar{\sigma}_\mu - \omega_{\mu\nu} V^\mu \bar{\sigma}^\nu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu) V^\nu \bar{\sigma}_\mu,
\end{aligned} \tag{0.18}$$

откуда $V^\mu \to (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu) V^\nu$, что и требовалось показать.

◯ 2 (10 баллов). Тождество Гордона

Для доказательства тождества

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p), \tag{0.19}$$

где $q = (p' - p)$, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, мы используем, что $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$ и $\bar{u}(p')(\gamma^\mu p'_\mu - m) = 0$, откуда

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) &= \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} - \frac{1}{4m}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(p'_\nu - p_\nu) \right] u(p) = \\
&= \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} - \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu p'_\nu}{4m} + \frac{\gamma^\mu}{4} + \frac{\gamma^\mu}{4} - \frac{\gamma^\nu\gamma^\mu p_\nu}{4m} \right] u(p) = \\
&= \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{(\gamma^\nu\gamma^\mu - 2g^{\mu\nu})p'_\nu}{4m} + \frac{\gamma^\mu}{2} + \frac{(\gamma^\mu\gamma^\nu - 2g^{\mu\nu})p_\nu}{4m} \right] u(p) = \\
&= \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p).
\end{aligned} \tag{0.20}$$

◯ 3 (45 баллов). Произведение спиноров

Пусть k_0^μ, k_1^μ фиксированные 4-векторы, удовлетворяющие $k_0^2 = 0, k_1^2 = -1$, $k_0 \cdot k_1 = 0$. Определим базис спиноров следующим способом: Пусть u_{L0} будет левополяризованным спинором для фермиона с импульсом k_0. Пусть $u_{R0} = \not{k}_1 u_{L0}$. Тогда для любого светоподобного импульса p ($p^2 = 0$), определим:

$$u_L(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{R0}, \quad u_R(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{L0}. \tag{0.21}$$

Такой набор условий определяет спиноры однозначно (кроме случая, когда p параллелен k_0).

(a). (15 баллов) Имеем для $\not{k}_0 u_{R0} = 0$, используя, что $\not{k}_0 u_{L0} = 0$:

$$\not{k}_0 u_{R0} = \not{k}_0 \not{k}_1 u_{L0} = \gamma^\mu k_{0\mu}\gamma^\nu k_{1\nu} u_{L0} = -\gamma^\nu\gamma^\mu k_{0\mu}k_{1\nu}u_{L0} + 2g^{\mu\nu}k_{0\mu}k_{1\nu}u_{L0} = -\not{k}_1\not{k}_0 u_{L0} + 2k_0\cdot k_1 u_{L0} = 0.$$

Далее для любого светоподобного p имеем ($p^2 = 0$):

$$\not{p}u_L(p) = \frac{1}{\sqrt{2p\cdot k_0}}\not{p}\not{p}u_{R0} = \frac{1}{\sqrt{2p\cdot k_0}}\gamma^\mu p_\mu\gamma^\nu p_\nu u_{R0} = \frac{1}{\sqrt{2p\cdot k_0}}\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)p_\mu p_\nu u_{R0} = \frac{g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu u_{R0}}{\sqrt{2p\cdot k_0}} = 0$$

$$\not{p}u_R(p) = \frac{1}{\sqrt{2p\cdot k_0}}\not{p}\not{p}u_{L0} = \frac{1}{\sqrt{2p\cdot k_0}}\gamma^\mu p_\mu\gamma^\nu p_\nu u_{L0} = \frac{1}{\sqrt{2p\cdot k_0}}\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)p_\mu p_\nu u_{L0} = \frac{g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu u_{L0}}{\sqrt{2p\cdot k_0}} = 0.$$

(b). (15 баллов) Для $k_0 = (E,0,0,-E)$, $k_1 = (0,1,0,0)$, построим u_{L0}, u_{R0}, $u_L(p)$ и $u_R(p)$ явно. Имеем

$$u_{L0} = \begin{pmatrix} \sqrt{k_0\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{k_0\cdot\bar\sigma}\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\xi \\ \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\xi \end{pmatrix} = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\xi \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\xi \end{pmatrix} \tag{0.22}$$

Также мы имеем $\frac{1-\gamma^5}{2}u_{L0} = u_{L0}$, откуда получим

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\sqrt{2E}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\xi \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\xi \end{pmatrix} = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\xi \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\xi \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\xi \end{pmatrix} \tag{0.23}$$

Следовательно $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и мы получаем для u_{L0}:

$$u_{L0} = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.24}$$

Далее получаем для $u_{R0} = \not{k}_1 u_{L0}$:

$$u_{R0} = -\gamma^1 k_1^1 u_{L0} = -k_1^1\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\sqrt{2E}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma^1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{0.25}$$

Далее имеем для $p = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ имеем: $2p\cdot k_0 = 2E(p^0 + p^3)$ и

$$\begin{aligned} u_L(p) &= \frac{1}{\sqrt{2p\cdot k_0}}\not{p}u_{R0} = \frac{1}{\sqrt{2E(p^0+p^3)}}\begin{pmatrix} 0 & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar\sigma & 0 \end{pmatrix}\sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p^0+p^3}}\begin{pmatrix} -p^1 + ip^2 \\ p^0 + p^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_R(p) &= \frac{1}{\sqrt{2p\cdot k_0}}\not{p}u_{L0} = \frac{1}{\sqrt{2E(p^0+p^3)}}\begin{pmatrix} 0 & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar\sigma & 0 \end{pmatrix}\sqrt{2E}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p^0+p^3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p^0 + p^3 \\ p^1 + ip^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{0.26}$$

(c). (15 баллов) Определим спинорные произведения $s(p_1, p_2)$ и $t(p_1, p_2)$, для светоподоных p_1, p_2, по формулам

$$s(p_1, p_2) = \bar{u}_R(p_1)u_L(p_2), \quad t(p_1, p_2) = \bar{u}_L(p_1)u_R(p_2). \tag{0.27}$$

Используя явные выражения для u_λ в части **(b)**, вычисляем

$$\begin{aligned}
s(p_1, p_2) = \bar{u}_R(p_1)u_L(p_2) &= \frac{1}{\sqrt{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1^0 + p_1^3 \\ p_1^1 - ip_1^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_2^1 + ip_2^2 \\ p_2^0 + p_2^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{(p_2^0 + p_2^3)(p_1^1 - ip_1^2) - (p_1^0 + p_1^3)(p_2^1 - ip_2^2)}{\sqrt{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)}} = \\
&= \frac{[(p_2^0 + p_2^3)p_1^1 - (p_1^0 + p_1^3)p_2^1] - i[(p_2^0 + p_2^3)p_1^2 - (p_1^0 + p_1^3)p_2^2]}{\sqrt{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)}},
\end{aligned} \tag{0.28}$$

а также

$$\begin{aligned}
t(p_1, p_2) = \bar{u}_L(p_1)u_R(p_2) &= \frac{1}{\sqrt{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)}} \begin{pmatrix} -p_1^1 - ip_1^2 \\ p_1^0 + p_1^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_2^0 + p_2^3 \\ p_2^1 + ip_2^2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^1 + ip_2^2) - (p_2^0 + p_2^3)(p_1^1 + ip_1^2)}{\sqrt{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)}} = \\
&= \frac{[(p_1^0 + p_1^3)p_2^1 - (p_2^0 + p_2^3)p_1^1] - i[(p_2^0 + p_2^3)p_1^2 - (p_1^0 + p_1^3)p_2^2]}{\sqrt{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)}},
\end{aligned} \tag{0.29}$$

откуда получаем

$$(s(p_2, p_1))^* = \frac{[(p_1^0 + p_1^3)p_2^1 - (p_2^0 + p_2^3)p_1^1] + i[(p_1^0 + p_1^3)p_2^2 - (p_2^0 + p_2^3)p_1^2]}{\sqrt{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)}} = t(p_1, p_2). \tag{0.30}$$

Также легко заметить, что $s(p_1, p_2) = -s(p_2, p_1)$. Теперь находим

$$\begin{aligned}
|s(p_1, p_2)|^2 &= \left| \frac{[(p_2^0 + p_2^3)p_1^1 - (p_1^0 + p_1^3)p_2^1] - i[(p_2^0 + p_2^3)p_1^2 - (p_1^0 + p_1^3)p_2^2]}{\sqrt{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)}} \right|^2 = \\
&= \frac{[(p_2^0 + p_2^3)p_1^1 - (p_1^0 + p_1^3)p_2^1]^2 + [(p_2^0 + p_2^3)p_1^2 - (p_1^0 + p_1^3)p_2^2]^2}{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)} = \\
&= \frac{(p_1^0 + p_1^3)^2((p_2^1)^2 + (p_2^2)^2) + (p_2^0 + p_2^3)^2((p_1^1)^2 + (p_1^2)^2) - 2(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)(p_1^1p_2^1 + p_1^2p_2^2)}{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)} = \\
&= \frac{(p_1^0 + p_1^3)^2((p_2^0)^2 - (p_2^3)^2) + (p_2^0 + p_2^3)^2((p_1^0)^2 - (p_1^3)^2) - 2(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)(p_1^1p_2^1 + p_1^2p_2^2)}{(p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 + p_2^3)} = \\
&= (p_1^0 + p_1^3)(p_2^0 - p_2^3) + (p_2^0 + p_2^3)(p_1^0 - p_1^3) - 2(p_1^1p_2^1 + p_1^2p_2^2) = \\
&= 2(p_1^0p_2^0 - p_1^1p_2^1 - p_1^2p_2^2 - p_1^3p_2^3) = 2p_1 \cdot p_2.
\end{aligned} \tag{0.31}$$

◯ 4 (100 баллов). Майорановские фермионы

Релятивистское уравнение для безмассового 2-компонентного фермионного поля, которое преобразутеся как верхние две компоненты Дираковского спинора (ψ_L) можно записать как:

$$i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\psi_L = 0 \tag{0.32}$$

Обозначим такое двухкомпонентное поле $\chi_a(x)$, $a = 1, 2$.

(a). (20 баллов) Рассмотрим уравнение для $\chi(x)$ следующего вида

$$i\bar{\sigma} \cdot \partial\chi - im\sigma^2\chi^* = 0. \tag{0.33}$$

Покажем, что это уравнение является релятивистски инвариантным. При инфинитезимальном преобразовании Лоренца $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu)x^\nu$, из Лоренц-инвариантности массивного уравнения Дирака: $i\bar{\sigma}\partial\psi_L = m\psi_R$ и из того, что χ преобразуется как левый спинор ψ_L, следует, что величина $i\bar{\sigma}\partial\chi$ преобразуется, как правый спинор ψ_R: $i\bar{\sigma}\partial\chi \to (1 + (\boldsymbol{\beta} - i\boldsymbol{\theta})\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})i\bar{\sigma}\partial\chi$. Также, так как $\chi \to (1 - (\boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\theta})\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\chi$, то, используя тождество $\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma^2$ можно получить

$$\sigma^2\chi^* \to (1 + (\boldsymbol{\beta} - i\boldsymbol{\theta})\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\sigma^2\chi^*, \tag{0.34}$$

то есть $\sigma^2\chi^*$ тоже преобразуется, как правый спинор ψ_R. Мы видим, что обе части уравнения (0.33) преобразуются одинаково при преобразовании Лоренца, откуда следует, что уравнение является Лоренц-инвариантным. Далее имеем

$$\sigma\partial(\bar{\sigma}\partial\chi) = m\sigma\partial(\sigma^2\chi^*) \tag{0.35}$$

Далее используя, что $\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\nu = 2g^{\mu\nu}$, получим $\sigma\partial(\bar{\sigma}\partial\chi) = \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\nu)\partial_\mu\partial_\nu = \partial^2$. Теперь из уравнения (0.33) имеем $(\sigma^2)^*(\bar{\sigma})^*\partial\chi^* = m\chi$. И получаем $(\sigma^2)^*(\bar{\sigma})^*\partial\chi^* = -\sigma^2(\bar{\sigma})^*\partial\chi^* = -\sigma\sigma^2\partial\chi^* = -\sigma\partial(\sigma^2\chi^*)$. Откуда в итоге получаем для (0.35), что

$$\partial^2\chi = -m^2\chi, \tag{0.36}$$

что и есть уравнение Клейна-Гордона $(\partial^2 + m^2)\chi = 0$. Такая форма фермионной массы называется Майорановское массовое слагаемое.

(b). (20 баллов) Следует ли уравнение Майорана из лагранжиана? Казалось бы, массовое слагаемое, получается варьированием выражения $(\sigma^2)_{ab}\chi_a^*\chi_b^*$; Однако, так как σ^2 — антисимметричная матрица, это выражение обратилось бы в нуль, если бы $\chi(x)$ было бы обычным c-числовым полем. Известно, что при переходе к квантовой теории поля $\chi(x)$ становится антикоммутирующим квантовым полем. Следовательно, имеет смысл развивать классическую теорию поля, рассматривая $\chi(x)$ как классическое антикоммутирующее поле, то есть как поле, которое принимает значения в грассмановых числах, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha\beta = -\beta\alpha, \quad \text{для любых} \quad \alpha, \beta. \tag{0.37}$$

Заметим, что из этих соотношений следует, что $\alpha^2 = 0$. Грассманово поле $\xi(x)$ может быть разложено по базису функций как

$$\xi(x) = \sum_n \alpha_n\phi_n(x), \tag{0.38}$$

где $\phi_n(x)$ — ортогональные c-числовые функции и α_n — набор независимых грассмановых чисел. Определим комплексное сопряжение произведения грассмановых чисел как обращающее их порядок:

$$(\alpha\beta)^* \equiv \beta^*\alpha^* = -\alpha^*\beta^*. \tag{0.39}$$

Это правило по форме совпадает с эрмитовым сопряжением квантовых полей. Покажем, что классическое действие

$$S = \int d^4x \left[\chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + \frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*)\right], \tag{0.40}$$

(где $\chi^\dagger = (\chi^*)^T$) является вещественным ($S^* = S$) и варьирование S относительно χ и χ^* приводит к уравнению Майорана. Имеем

$$S^* = \int d^4x \left[\chi_\alpha(-i(\bar{\sigma}^\mu)^*_{\alpha\beta}\partial_\mu)\chi^*_\beta + \frac{(-i)m}{2}(-\chi^*_\alpha(\sigma^2)^*_{\alpha\beta}\chi^*_\beta + \chi_\alpha(\sigma^2)^*_{\alpha\beta}\chi_\beta)\right], \tag{0.41}$$

далее используем, что $(\bar{\sigma}^\mu)^*_{\alpha\beta} = (\bar{\sigma}^\mu)_{\beta\alpha}$, $(\sigma^2)^*_{\alpha\beta} = (\sigma^2)_{\beta\alpha}$ и $\chi_\alpha\chi^*_\beta = -\chi^*_\beta\chi_\alpha$ получим

$$S^* = \int d^4x \left[\partial_\mu\chi^*_\beta(-i(\bar{\sigma}^\mu)_{\beta\alpha})\chi_\alpha - \frac{im}{2}(\chi^*_\beta(\sigma^2)_{\beta\alpha}\chi^*_\alpha - \chi_\beta(\sigma^2)_{\beta\alpha}\chi_\alpha)\right] = S. \tag{0.42}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S}{\delta\chi^*_\alpha} = i(\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu\chi_\beta - im(\sigma^2)_{\alpha\beta}\chi^*_\beta = i\bar{\sigma}\partial\chi - im\sigma^2\chi^*,\\
0 &= \frac{\delta S}{\delta\chi_\alpha} = -i(\partial_\mu\chi^*_\beta)(\bar{\sigma}^\mu)_{\beta\alpha} + im\chi_\beta(\sigma^2)_{\beta\alpha} = -i(\partial\chi^\dagger)\bar{\sigma} + im\chi^T\sigma^2,
\end{aligned} \tag{0.43}$$

где мы учитывали, что вариации грассманова поля антикоммутируют с самими полями: $\delta\chi_\alpha\chi_\beta = -\chi_\beta\delta\chi_\alpha$.

(c). (20 баллов) Запишем 4-компонентное дираковское поле

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{0.44}$$

и напомним, что нижняя компонента ψ преобразуется по представлению, унитарно эквивалентному комплексно-сопряженному представлению ψ_L. Таким образом, можно переписать 4-компонетное дираковское поле в терминах двух 2-компонентных спиноров:

$$\psi_L(x) = \chi_1(x), \quad \psi_R(x) = i\sigma^2\chi^*_2(x). \tag{0.45}$$

Перепишем действие Дирака в терминах χ_1 и χ_2. Имеем

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4x\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \int d^4x \begin{pmatrix} \psi^\dagger_L & \psi^\dagger_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & i\sigma\partial \\ i\bar{\sigma}\partial & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} =\\
&= \int d^4x(i\psi^\dagger_L\bar{\sigma}\partial\psi_L + i\psi^\dagger_R\sigma\partial\psi_R - m(\psi^\dagger_R\psi_L + \psi^\dagger_L\psi_R)) =\\
&= \int d^4x(i\chi^\dagger_1\bar{\sigma}\partial\chi_1 - i\chi^T_2(\bar{\sigma})^*\partial\chi^*_2 + im(\chi^T_2\sigma^2\chi_1 - \chi^\dagger_1\sigma^2\chi^*_2)).
\end{aligned} \tag{0.46}$$

В итоге получим

$$S=\int d^4x(i\chi_1^\dagger\bar\sigma\partial\chi_1+i\chi_2^\dagger\bar\sigma\partial\chi_2+im(\chi_2^T\sigma^2\chi_1-\chi_1^\dagger\sigma^2\chi_2^*)). \tag{0.47}$$

(d). (20 баллов) Действие пункта **(c)** имеет глобальную симметрию:

$$\chi_1\to e^{i\alpha}\chi_1,\quad \chi_2\to e^{-i\alpha}\chi_2. \tag{0.48}$$

Далее имеем для тока $J^\mu=\chi^\dagger\bar\sigma^\mu\chi$:

$$\partial_\mu J^\mu=\partial_\mu(\chi^\dagger\bar\sigma^\mu\chi)=(\partial_\mu\chi^\dagger)\bar\sigma^\mu\chi+\chi^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi=m\chi^T\sigma^2\chi+m\chi^\dagger\sigma^2\chi^* \tag{0.49}$$

Дивергенция данного равна нулю, только если $m=0$. В данном случае, массовое слагаемое нарушает глобальную $U(1)$-симметрию $\chi\to e^{i\alpha}\chi$. Далее для тока $J^\mu=\chi_1^\dagger\bar\sigma^\mu\chi_1-\chi_2^\dagger\bar\sigma^\mu\chi_2$ получаем

$$\begin{aligned}\partial_\mu J^\mu&=(\partial_\mu\chi_1^\dagger)\bar\sigma^\mu\chi_1+\chi_1^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi_1-(\partial_\mu\chi_2^\dagger)\bar\sigma^\mu\chi_2-\chi_2^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi_2=\\&=(m\chi_2^T\sigma^2)\chi_1+\chi_1^\dagger(m\sigma^2\chi_2^*)-(m\chi_1^T\sigma^2)\chi_2-\chi_2^\dagger(m\sigma^2\chi_1^*)=0,\end{aligned} \tag{0.50}$$

где мы использовали, что $\chi_2^T\sigma^2\chi_1=\chi_1^T\sigma^2\chi_2$ и $\chi_1^\dagger\sigma^2\chi_2^*=\chi_2^\dagger\sigma^2\chi_1^*$. Данный ток является Нетеровским током глобальной симметрии $\chi_1\to e^{i\alpha}\chi_1,\ \chi_2\to e^{-i\alpha}\chi_2$.

Построим теорию из N свободных массивных 2-компонентных фермионных полей с $O(N)$ симметрией (то есть с вращательной симметрией в N-мерном пространстве). Имеем для $A=1,2,...,N$, $\alpha=1,2$ и $\chi_{A,\alpha}$ (далее мы не пишем индекс α):

$$\mathcal{L}=\sum_{A=1}^N\chi_A^\dagger i\bar\sigma\cdot\partial\chi_A+\frac{im}{2}\sum_{A=1}^N(\chi_A^T\sigma^2\chi_A-\chi_A^\dagger\sigma^2\chi_A^*). \tag{0.51}$$

При ортогональном преобразовании $\chi_A\to\sum_B O_{AB}\chi_B$, где $\sum_B O_{AB}O_{CB}=\sum_B O_{BA}O_{BC}=\delta_{AC}$, имеем

$$\mathcal{L}\to\mathcal{L}=\sum_{A,B,C}\chi_C^\dagger O_{AC}i\bar\sigma\cdot\partial O_{AB}\chi_B+\frac{im}{2}\sum_{A,B,C}(\chi_C^TO_{AC}\sigma^2O_{AB}\chi_B-\chi_C^\dagger O_{AC}\sigma^2O_{AB}\chi_B^*)=\mathcal{L}, \tag{0.52}$$

где матрицы ($\bar\sigma,\ \sigma^2$) и O очевидно коммутируют друг с другом, так как действуют в разных пространствах. Мы видим, что Лагранжиан действительно имеет $O(N)$-симметрию.

(e). (20 баллов) Проквантуем теорию Майорана пунктов **(a)** и **(b)**. Рассмотрим $\chi(x)$ как квантовое поле, удовлетворяющее каноническому антикоммутационному соотношению

$$\{\chi_a(\boldsymbol{x}),\chi_b^\dagger(\boldsymbol{y})\}=\delta_{ab}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{0.53}$$

Построим эрмитовый гамильтониан. Итак наше действие дается формулой

$$S=\int d^4x\big[\chi^\dagger i\bar\sigma\cdot\partial\chi+\frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi-\chi^\dagger\sigma^2\chi^*)\big], \tag{0.54}$$

откуда для канонического момента получаем

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\chi)}=i\chi^\dagger. \tag{0.55}$$

Тогда для гамильтониана получаем

$$H = \int d^3x(\pi(x)\partial_0\chi(x) - \mathcal{L}) = \int d^3x\big(i\chi^\dagger \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\chi - \frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*)\big). \tag{0.56}$$

Теперь, чтобы проквантовать Майорановское поле нам нужно найти решение классического уравнения

$$i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi - im\sigma^2\chi^* = 0. \tag{0.57}$$

По аналогии с уравнением Дирака, будем искать решение в виде

$$\chi(x) = a_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi e^{-ipx} + b^*_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\sigma}\eta e^{ipx}. \tag{0.58}$$

Подставляя такой анзац в уравнение (0.57), получим

$$a_{\boldsymbol{p}}p\cdot\bar{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi e^{-ipx} - b^*_{\boldsymbol{p}}p\cdot\bar{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\eta e^{ipx} = im\sigma^2 a^*_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\sigma^*}\xi^* e^{ipx} + im\sigma^2 b_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\sigma^*}\eta^* e^{-ipx}, \tag{0.59}$$

далее используя тождества[1] $\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*} = \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sigma^2$ и $\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma} = m$, найдем

$$\begin{aligned} a_{\boldsymbol{p}}m\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi &= imb_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sigma^2\eta^* \\ -b^*_{\boldsymbol{p}}m\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta &= ima^*_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sigma^2\xi^*, \end{aligned} \tag{0.60}$$

откуда $a_{\boldsymbol{p}} = b_{\boldsymbol{p}}$ и $\xi = i\sigma^2\eta^*$ или $\eta = -i\sigma^2\xi^*$. Таким образом вводя ортонормированный базис спиноров ξ^s: $\xi^{s\dagger}\xi^r = \delta^{rs}$, $r,s = 1,2$, мы можем записать проквантованное поле $\chi(x)$ как

$$\chi(x) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1,2}(a^s_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s e^{-ipx} - ia^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\sigma}\sigma^2\xi^{s*}e^{ipx}). \tag{0.61}$$

В представлении Шредингера данное поле можно переписать как

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1,2}(a^s_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s - ia^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sigma^2\xi^{s*}), \tag{0.62}$$

где $\{a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}$ и $\{a^r_{\boldsymbol{p}}, a^s_{\boldsymbol{q}}\} = \{a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = 0$. Теперь проверим, что данное поле действительно удовлетворяет коммутационному соотношению $\{\chi_a(\boldsymbol{x}), \chi^\dagger_b(\boldsymbol{y})\} = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$. Имеем, используя антикоммутаторы и свойство $(\sqrt{p\cdot\sigma})^\dagger = \sqrt{p\cdot\sigma}$:

$$\begin{aligned} &\{\chi_a(\boldsymbol{x}), \chi^\dagger_b(\boldsymbol{y})\} = \\ &= \int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{e^{i\boldsymbol{x}\boldsymbol{p}-i\boldsymbol{y}\boldsymbol{q}}}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}2E_{\boldsymbol{q}}}}\sum_{s,r}\{(a^s_{\boldsymbol{p}}(\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s)_a - ia^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}(\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sigma^2\xi^{s*})_a), (a^{r\dagger}_{\boldsymbol{q}}(\xi^{r\dagger}\sqrt{q\cdot\sigma})_b + ia^r_{-\boldsymbol{q}}(\xi^{rT}\sigma^2\sqrt{q\cdot\bar{\sigma}})_b)\} = \\ &= \int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{e^{i\boldsymbol{x}\boldsymbol{p}-i\boldsymbol{y}\boldsymbol{q}}}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}2E_{\boldsymbol{q}}}}\sum_{s,r}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}\big((\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s)_a(\xi^{r\dagger}\sqrt{q\cdot\sigma})_b + (\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sigma^2\xi^{s*})_a(\xi^{rT}\sigma^2\sqrt{q\cdot\bar{\sigma}})_b\big) = \\ &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s=1,2}\big((\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s)_a(\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma})_b + (\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sigma^2\xi^{s*})_a(\xi^{sT}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}})_b\big). \end{aligned} \tag{0.63}$$

[1] Матрица $\sqrt{p\cdot\sigma}$ изучалась в Упражнениях 6 и ее явный вид можно найти в Решениях упражнений 6.

Далее, используя свойство полноты базиса ξ^s: $\sum_{s=1,2}\xi^s_a\xi^{s*}_b=\delta_{ab}$, получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1,2}(\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s)_a(\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma})_b=\sum_{s=1,2}(\sqrt{p\cdot\sigma})_{ac}\xi^s_c\xi^{*s}_d(\sqrt{p\cdot\sigma})_{db}=(\sqrt{p\cdot\sigma})_{ac}(\sqrt{p\cdot\sigma})_{cb}=(p\cdot\sigma)_{ab},\\
&\sum_{s=1,2}(\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2\xi^{s*})_a(\xi^{sT}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma})_b=\sum_{s=1,2}(\sqrt{p\cdot\bar\sigma})_{ac}(\sigma^2)_{cd}\xi^{s*}_d\xi^s_e(\sigma^2)_{ef}(\sqrt{p\cdot\bar\sigma})_{fb}=\\
&\qquad\qquad=(\sqrt{p\cdot\bar\sigma})_{ac}(\sigma^2)_{cd}(\sigma^2)_{df}(\sqrt{p\cdot\bar\sigma})_{fb}=(\sqrt{p\cdot\bar\sigma})_{ac}\sqrt{p\cdot\bar\sigma})_{cb}=(p\cdot\bar\sigma)_{ab}.
\end{aligned}\tag{0.64}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned}
\{\chi_a(\boldsymbol{x}),\chi^\dagger_b(\boldsymbol{y})\}&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{2E_{\boldsymbol{p}}}((p\cdot\sigma)_{ab}+(p\cdot\bar\sigma)_{ab})=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{2E_{\boldsymbol{p}}}2E_{\boldsymbol{p}}\delta_{ab}=\\
&=\delta_{ab}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned}\tag{0.65}$$

Теперь найдем гамильтониан

$$H=\int d^3x\big(i\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma\nabla}\chi-\frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi-\chi^\dagger\sigma^2\chi^*)\big),\tag{0.66}$$

в терминах операторов рождения и уничтожения. Сначала найдем первое слагаемое в гамильтониане:

$$\begin{aligned}
H_1&=\int d^3x(i\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma\nabla}\chi)=\\
&=-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s,r}(\xi^{\dagger s}\sqrt{p\cdot\sigma}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}+ia^s_{-\boldsymbol{p}}\xi^{sT}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma})\boldsymbol{\sigma p}(a^r_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^r-ia^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2\xi^{r*}).
\end{aligned}\tag{0.67}$$

Далее используем, что $\boldsymbol{\sigma p}=\frac{1}{2}(p\cdot\bar\sigma-p\cdot\sigma)$, откуда

$$\begin{aligned}
&\sqrt{p\cdot\sigma}\boldsymbol{\sigma p}\sqrt{p\cdot\sigma}=\frac12\sqrt{p\cdot\sigma}(p\cdot\bar\sigma-p\cdot\sigma)\sqrt{p\cdot\sigma}=\frac12(m^2-(p\cdot\sigma)^2)=(E_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\sigma p}-|\boldsymbol{p}|^2),\\
&\sqrt{p\cdot\sigma}\boldsymbol{\sigma p}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2=\frac12\sqrt{p\cdot\sigma}(p\cdot\bar\sigma-p\cdot\sigma)\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2=\frac12(m(p\cdot\bar\sigma)-(p\cdot\sigma)m)\sigma^2=m\boldsymbol{\sigma p}\sigma^2,\\
&\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\boldsymbol{\sigma p}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2=\frac12\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}(p\cdot\bar\sigma-p\cdot\sigma)\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2=\frac12\sigma^2((p\cdot\bar\sigma)^2-m^2)\sigma^2=(-E_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{p}+|\boldsymbol{p}|^2),\\
&\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\boldsymbol{\sigma p}\sqrt{p\cdot\sigma}=\frac12\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}(p\cdot\bar\sigma-p\cdot\sigma)\sqrt{p\cdot\sigma}=\frac12\sigma^2((p\cdot\bar\sigma)m-m(p\cdot\sigma))=m\sigma^2\boldsymbol{\sigma p}.
\end{aligned}\tag{0.68}$$

В итоге получим

$$\begin{aligned}
H_1=-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s,r}\big(&\xi^{s\dagger}(E_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\sigma p}-|\boldsymbol{p}|^2)\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}}-i\xi^{s\dagger}(m\boldsymbol{\sigma p}\sigma^2)\xi^{r*}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}+i\xi^{sT}(m\sigma^2\boldsymbol{\sigma p})\xi^r a^s_{-\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}}+\\
&+\xi^{sT}(-E_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{p}+|\boldsymbol{p}|^2)\xi^{r*}a^s_{-\boldsymbol{p}}a^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}\big).
\end{aligned}\tag{0.69}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
H_2&=-\frac{im}{2}\int d^3x(\chi^T\sigma^2\chi)=\\
&=-\frac{im}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s,r}(a^s_{-\boldsymbol{p}}\xi^{sT}\sqrt{p\cdot\bar\sigma^T}-ia^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}\xi^{s\dagger}(\sigma^2)^T\sqrt{p\cdot\sigma^T})\sigma^2(a^r_{\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^r-ia^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2\xi^{r*}).
\end{aligned}\tag{0.70}$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{p\cdot\bar\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}=\sqrt{p\cdot\bar\sigma^*}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}=\sigma^2(p\cdot\sigma),\\
&\sqrt{p\cdot\bar\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2=\sqrt{p\cdot\bar\sigma^*}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2=\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2=m\\
&(\sigma^2)^T\sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}=-\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}=-\sigma^2\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}=-m,\\
&(\sigma^2)^T\sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2=-\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2=-(p\cdot\bar\sigma)\sigma^2,
\end{aligned}\tag{0.71}$$

откуда получим

$$\begin{aligned}
&H_2=-\frac{im}{2}\int d^3x(\chi^T\sigma^2\chi)=\\
&=-\frac{im}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol p}}\sum_{s,r}(\xi^{sT}\sigma^2(p\cdot\sigma)\xi^r a^s_{-\boldsymbol p}a^r_{\boldsymbol p}-im\xi^{sT}\xi^{r*}a^s_{-\boldsymbol p}a^{r\dagger}_{-\boldsymbol p}+im\xi^{r\dagger}\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}a^r_{\boldsymbol p}+\xi^{s\dagger}(p\cdot\bar\sigma)\sigma^2\xi^{r*}a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}a^{r\dagger}_{-\boldsymbol p}).
\end{aligned}\tag{0.72}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
H_3&=\frac{im}{2}\int d^3x(\chi^\dagger\sigma^2\chi^*)=\\
&=\frac{im}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol p}}\sum_{s,r}(\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma}a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}+ia^s_{-\boldsymbol p}\xi^{sT}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma})\sigma^2(a^{r\dagger}_{-\boldsymbol p}\sqrt{p\cdot\bar\sigma^*}\xi^{r*}+ia^r_{\boldsymbol p}\sqrt{p\cdot\sigma^*}(\sigma^2)^*\xi^r).
\end{aligned}\tag{0.73}$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{p\cdot\sigma}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma^*}=(p\cdot\sigma)\sigma^2,\\
&\sqrt{p\cdot\sigma}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}(\sigma^2)^*=-\sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2\sigma^2=-m,\\
&\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma^*}=\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\sigma^2=m\\
&\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}(\sigma^2)^*=-\sigma^2(p\cdot\bar\sigma),
\end{aligned}\tag{0.74}$$

откуда получим

$$\begin{aligned}
&H_3=\frac{im}{2}\int d^3x(\chi^\dagger\sigma^2\chi^*)=\\
&=\frac{im}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol p}}\sum_{s,r}(\xi^{s\dagger}(p\cdot\sigma)\sigma^2\xi^{r*}a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}a^{r\dagger}_{-\boldsymbol p}-im\xi^{s\dagger}\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}a^r_{\boldsymbol p}+im\xi^{sT}\xi^{r*}a^s_{-\boldsymbol p}a^{r\dagger}_{-\boldsymbol p}+\xi^{sT}\sigma^2(p\cdot\bar\sigma)\xi^r a^s_{-\boldsymbol p}a^r_{\boldsymbol p}).
\end{aligned}\tag{0.75}$$

В итоге находим

$$\begin{aligned}
H&=H_1+H_2+H_3=\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol p}}\sum_{s,r=1,2}(E_{\boldsymbol p}\xi^{s\dagger}(p\cdot\sigma)\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}a^r_{\boldsymbol p}-E_{\boldsymbol p}\xi^{sT}(p\cdot\sigma^T)\xi^{r*}a^s_{-\boldsymbol p}a^{r\dagger}_{-\boldsymbol p})=\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_{s,r=1,2}(\xi^{s\dagger}(p\cdot\sigma)\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}a^r_{\boldsymbol p}-\xi^{r\dagger}(p\cdot\sigma)\xi^s a^s_{-\boldsymbol p}a^{r\dagger}_{-\boldsymbol p})=\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_{s,r=1,2}(\xi^{s\dagger}(p\cdot\sigma)\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}a^r_{\boldsymbol p}-\xi^{s\dagger}(p\cdot\bar\sigma)\xi^r a^r_{\boldsymbol p}a^{s\dagger}_{\boldsymbol p})=\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_{s,r=1,2}(\xi^{s\dagger}(p\cdot\sigma)\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}a^r_{\boldsymbol p}+\xi^{s\dagger}(p\cdot\bar\sigma)\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}a^r_{\boldsymbol p})=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\boldsymbol p}\sum_{s=1,2}a^{s\dagger}_{\boldsymbol p}a^s_{\boldsymbol p},
\end{aligned}\tag{0.76}$$

где в конце при антикоммутировании операторов мы выкинули бесконечную константу:

$$E_0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sum_{s,r=1,2} \xi^{s\dagger}(p\cdot\bar{\sigma})\xi^r (2\pi)^3 \delta(0) \delta^{rs} = V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} p^\mu \mathrm{tr}(\bar{\sigma}_\mu) = V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}}, \tag{0.77}$$

где $V = (2\pi)^3\delta(0)$ — объем пространства. Таким образом Гамильтониан имеет вид

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_{s=1,2} a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} a_{\boldsymbol{p}}^s + E_0. \tag{0.78}$$