Листок 6. Поле Дирака

(Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **27.10.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

Все задачи в этом листке взяты из книги Пескина Шредера, глава 3.

◯ **1. (45 баллов) Представления группы Лоренца**

Итак коммутационные соотношения для генераторов алгебры Лоренца:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}). \tag{0.1}$$

(a). (15 баллов) Определим генераторы поворотов и бустов по формулам

$$L^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk}, \quad K^i = J^{0i}, \tag{0.2}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$. Инфинитезимальное преобразование Лоренца может быть записано как

$$\Phi \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{L} - i\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{K})\Phi. \tag{0.3}$$

Запишите коммутационные соотношения для L^i и K^i явно. Покажите, что комбинации

$$\boldsymbol{J}_+ = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + i\boldsymbol{K}), \quad \boldsymbol{J}_- = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} - i\boldsymbol{K}) \tag{0.4}$$

коммутируют друг с другом, и по отдельности удовлетворяют коммутационным соотношениям момента импульса.

(b). (15 баллов) Конечномерные представления группы вращений нумеруются допустимыми значениям орбитального момента: целыми и полуцелыми числами. Из результата части **(a)** следуют, что все конечномерные представления группы Лоренца соответствуют парам целых или полуцелых чисел, (j_+, j_-), которые в свою очередь соответствуют паре представлений группы поворотов. Используя то, что $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma}/2$ для представления спина-1/2, запишите явно закон преобразования для 2-компонентных объектов преобразующихся по представлениям $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$ группы Лоренца. Покажите, что это есть в точности преобразования для ψ_L и ψ_R:

$$\psi_L \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_L, \quad \psi_R \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_R. \tag{0.5}$$

(c). (15 баллов) Тождество $\boldsymbol{\sigma}^T = -\sigma^2\boldsymbol{\sigma}\sigma^2$ позволяет переписать преобразование для ψ_L в эквивалентной форме

$$\psi' \to \psi'(1 + i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}), \tag{0.6}$$

где $\psi' = \psi_L^T\sigma^2$. Используя этот закон, мы можем записать объект, который преобразуется по представлению $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ как 2×2 матрица, которая преобразуется по закону ψ_R с левой стороны и одновременно преобразуется по закону транспонированного ψ_L с правой. Запишите эту матрицу в виде

$$\begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix}. \tag{0.7}$$

Покажите, что объект V^μ преобразуется как 4-вектор.

◯ 2 (10 баллов). Тождество Гордона

Выведите тождество

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(p), \tag{0.8}$$

где $q = (p' - p)$.

◯ 3 (45 баллов). Произведение спиноров

Пусть k_0^μ, k_1^μ фиксированные 4-векторы, удовлетворяющие $k_0^2 = 0, k_1^2 = -1$, $k_0 \cdot k_1 = 0$. Определим базис спиноров следующим способом: Пусть u_{L0} будет левополяризованным спинором для фермиона с импульсом k_0. Пусть $u_{R0} = \not{k}_1 u_{L0}$. Тогда для любого светоподобного импульса p ($p^2 = 0$), определим:

$$u_L(p) = \frac{1}{\sqrt{2p\cdot k_0}}\not{p}u_{R0}, \quad u_R(p) = \frac{1}{\sqrt{2p\cdot k_0}}\not{p}u_{L0}. \tag{0.9}$$

Такой набор условий определяет спиноры однозначно (кроме случая, когда p параллелен k_0).

(a). (15 баллов) Покажите, что $\not{k}_0 u_{R0} = 0$. Покажите, что для любого светоподобного p $\not{p}u_L(p) = \not{p}u_R(p) = 0$.

(b). (15 баллов) Для $k_0 = (E, 0, 0, -E)$, $k_1 = (0, 1, 0, 0)$, постройте u_{L0}, u_{R0}, $u_L(p)$ и $u_R(p)$ явно.

(c). (15 баллов) Определим спинорные произведения $s(p_1, p_2)$ и $t(p_1, p_2)$, для светоподоных p_1, p_2, по формулам

$$s(p_1, p_2) = \bar{u}_R(p_1)u_L(p_2), \quad t(p_1, p_2) = \bar{u}_L(p_1)u_R(p_2). \tag{0.10}$$

Используя явные выражения для u_λ в части **(b)**, вычислите спинорные произведения явно и покажите, что $t(p_1, p_2) = (s(p_2, p_1))^*$ и $s(p_1, p_2) = -s(p_2, p_1)$. Также покажите, что

$$|s(p_1, p_2)|^2 = 2p_1 \cdot p_2. \tag{0.11}$$

Откуда видно, что спиноры это квадратные корни из скалярного произведения 4-векторов.

◯ 4 (100 баллов). Майорановские фермионы

Релятивистское уравнение для безмассового 2-компонентного фермионного поля, которое преобразутеся как верхние две компоненты Дираковского спинора (ψ_L) можно записать как:

$$i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi_L = 0 \tag{0.12}$$

Обозначим такое двухкомпонентное поле $\chi_a(x)$, $a = 1, 2$.

(a). (20 баллов) Покажите, что можно записать уравнение для $\chi(x)$, как для массивного поля в следующем виде

$$i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi - im\sigma^2\chi^* = 0. \tag{0.13}$$

То есть, покажите вначале, что это уравнение является релятивистски инвариантным, а затем, что из него можно получить уравнение Клейна-Гордона $(\partial^2+m^2)\chi=0$. Такая форма фермионной массы называется Майорановское массовое слагаемое.

(b). (20 баллов) Следует ли уравнение Майорана из лагранжиана? Казалось бы, массовое слагаемое, получается варьированием выражения $(\sigma^2)_{ab}\chi_a^*\chi_b^*$; Однако, так как σ^2 — антисимметричная матрица, это выражение обратилось бы в нуль, если бы $\chi(x)$ было бы обычным c-числовым полем. Известно, что при переходе к квантовой теории поля $\chi(x)$ становится антикоммутирующим квантовым полем. Следовательно, имеет смысл развивать классическую теорию поля, рассматривая $\chi(x)$ как классическое антикоммутирующее поле, то есть как поле, которое принимает значения в грассмановых числах, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha\beta=-\beta\alpha, \quad \text{для любых} \quad \alpha,\beta. \tag{0.14}$$

Заметим, что из этих соотношений следует, что $\alpha^2=0$. Грассманово поле $\xi(x)$ может быть разложено по базису функций как

$$\xi(x)=\sum_n \alpha_n\phi_n(x), \tag{0.15}$$

где $\phi_n(x)$ — ортогональные c-числовые функции и α_n — набор независимых грассмановых чисел. Определим комплексное сопряжение произведения грассмановых чисел как обращающее их порядок:

$$(\alpha\beta)^*\equiv\beta^*\alpha^*=-\alpha^*\beta^*. \tag{0.16}$$

Это правило по форме совпадает с эрмитовым сопряжением квантовых полей. Покажите, что классическое действие

$$S=\int d^4x\left[\chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi+\frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi-\chi^\dagger\sigma^2\chi^*)\right], \tag{0.17}$$

(где $\chi^\dagger=(\chi^*)^T$) является вещественным ($S^*=S$) и варьирование S относительно χ и χ^* приводит к уравнению Майорана.

(c). (20 баллов) Запишем 4-компонентное дираковское поле

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix} \tag{0.18}$$

и напомним, что нижняя компонента ψ преобразуется по представлению, унитарно эквивалентному комплексно-сопряженному представлению ψ_L. Таким образом, можно переписать 4-компонетное дираковское поле в терминах двух 2-компонентных спиноров:

$$\psi_L(x)=\chi_1(x), \quad \psi_R(x)=i\sigma^2\chi_2^*(x). \tag{0.19}$$

Перепешите лагранжиан Дирака в терминах χ_1 и χ_2 и обратите внимание на форму массового слагаемого.

(d). (20 баллов) Покажите, что действие пункта **(c)** имеет глобальную симметрию. Вычислите дивергенции токов

$$J^\mu=\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi, \quad J^\mu=\chi_1^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi_1-\chi_2^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi_2, \tag{0.20}$$

для теорий пунктов **(b)** и **(c)** соответственно, и свяжите результаты с симметриями этих теорий. Постройте теорию из N свободных массивных 2-компонентных фермионных полей с $O(N)$ симметрией (то есть с вращательной симметрией в N-мерном пространстве).

(e). (20 баллов) Проквантуйте теорию Майорана пунктов **(a)** и **(b)**. Иными словами, рассмотрите $\chi(x)$ как квантовое поле, удовлетворяющее каноническому антикоммутационному соотношению

$$\{\chi_a(\boldsymbol{x}), \chi_b^\dagger(\boldsymbol{y})\} = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}). \tag{0.21}$$

Постройте эрмитовый гамильтониан и найдите представление канонических коммутационных соотношений, которое диагонализует гамильтониан в терминах набора операторов рождения и уничтожения. (Подсказка: сравните поле $\chi(x)$ с двумя верхними компонентами проквантованного дираковского поля)