Листок 5. Связь континуального интеграла и классической статфизики

Решения

○ **1. (25 баллов) Полубесконечная струна**

Данную статистическую сумму можно записать как:

$$Z(q_0) = \lim_{T\to\infty} \int dq_f \int_{q(0)=q_0}^{q(T)=q_f} [Dq(\tau)] e^{-\beta \int_0^T d\tau \left(\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right)}. \tag{0.1}$$

Далее, как мы знаем, интеграл по путям равен матричному элементу от оператора эволюции в квантовой механике ($\beta = \frac{1}{\hbar} = 1$):

$$Z(q_0) = \lim_{T\to\infty} \int dq_f \langle q_f | U(T,0) | q_0 \rangle = \lim_{T\to\infty} \int dq_f \langle q_f | e^{-TH} | q_0 \rangle, \tag{0.2}$$

где $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(q)$. Вставляя полный набор собственных состояний Гамильтониана: $1 = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$, мы получаем

$$Z(q_0) = \lim_{T\to\infty} \int dq_f \sum_{n=0}^{\infty} \langle q_f | n \rangle e^{-TE_n} \langle n | q_0 \rangle \to \big(\lim_{T\to\infty} \int dq_f \Psi_0(q_f) e^{-E_0 T} \big) \Psi_0^*(q_0) = \mathrm{const} \cdot \Psi_0^*(q_0). \tag{0.3}$$

Так как статсумма является вещественной функцией, можно записать

$$Z(q_0) = \mathrm{const} \cdot \Psi_0(q_0). \tag{0.4}$$

С одной стороны мы видим, что константа при $E_0 > 0$ стремится к нулю, но мы всегда можем нормировать нашу статистическую сумму так, чтобы сократить эту константу. В общем случае мы также не придаем значения бесконечным константам перед функциональным интегралом или интегралом по путям, так как обычно при подсчете физических величин такие бесконечные константы сокращаются.

○ **2. (25 баллов). Временное упорядочение**

Ответ на вопрос на засыпку: $\psi_{q_0}(q) = \langle q | q_0 \rangle = \delta(q - q_0)$.

Сама задача была по сути очевидной, так как мы уже получили равенство на лекции:

$$\langle q(\tau_1) ... q(\tau_N) \rangle = \langle 0 | T(\hat{q}_E(\tau_1)\hat{q}_E(\tau_2)...\hat{q}_E(\tau_N)) | 0 \rangle. \tag{0.5}$$

Далее, делая Виковский поворот ($\tau_k = e^{i\alpha} t_k$, $\alpha \to \frac{\pi}{2} - 0$): $\tau_k = (i-0)t_k$ мы не нарушаем T упорядочение (т. е. если изначально $\tau_i > \tau_j$, то и $t_i > t_j$), поэтому получим

$$\langle q(\tau_1) ... q(\tau_N) \rangle = \langle 0 | T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)...\hat{q}(t_N)) | 0 \rangle. \tag{0.6}$$

○ **4. Теорема Вика для ПГО (Простого Гармонического Осциллятора)**

(a). (25 баллов) Итак мы имеем

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}} (a e^{-imt} + a^\dagger e^{imt}). \tag{0.7}$$

Пусть теперь $t > t'$ откуда получаем

$$\begin{aligned}
T(\phi(t)\phi(t')) = \phi(t)\phi(t') = \frac{1}{2m}(ae^{-imt} + a^\dagger e^{imt})(ae^{-imt'} + a^\dagger e^{imt'}) = \\
= \frac{1}{2m}(a^2 e^{-imt-imt'} + a^\dagger a e^{imt} e^{-imt'} + (a^\dagger)^2 e^{imt+imt'} + aa^\dagger e^{-imt+imt'}) = \\
= \frac{1}{2m}(a^2 e^{-imt-imt'} + a^\dagger a e^{imt} e^{-imt'} + (a^\dagger)^2 e^{imt+imt'} + (1 + a^\dagger a) e^{-imt+imt'}) = \\
=: \phi(t)\phi(t') : + \frac{1}{2m} e^{-im(t-t')}.
\end{aligned} \tag{0.8}$$

Аналогично, если $t < t'$, то

$$T(\phi(t)\phi(t')) =: \phi(t)\phi(t') : + \frac{1}{2m} e^{im(t-t')}. \tag{0.9}$$

Откуда получаем

$$T(\phi(t)\phi(t')) =: \phi(t)\phi(t') : + \frac{1}{2m} e^{-im|t-t'|} =: \phi(t)\phi(t') : + G_F(t - t'). \tag{0.10}$$

Обобщение на случай $2n$ полей тривиально следует из метода индукции примененного к утверждению (см. Пескин Шредер параграф 4.3):

$$T(\phi(t_1)\phi(t_2)...\phi(t_m)) =: \phi(t_1)\phi(t_2)...\phi(t_m) + \text{все возможные свертки} :, \tag{0.11}$$

где каждая свертка дает пропагатор G_F.

(b). (25 баллов) В данном случае имеем

$$\begin{aligned}
T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) =& G_{12}G_{34} + G_{13}G_{24} + G_{14}G_{23} + \\
&+ G_{12} : \phi_3\phi_4 : + G_{14} : \phi_2\phi_2 : + G_{13} : \phi_2\phi_4 : + G_{23} : \phi_1\phi_4 : + \\
&+ G_{24} : \phi_1\phi_3 : + G_{34} : \phi_1\phi_2 : + :: \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : .
\end{aligned} \tag{0.12}$$

Теорема Вика работает, когда все нормально-упорядоченные слагаемые исчезают. Очевидно это происходит, когда мы берем матричный элемент по вакуумным состояниям $\langle 0|...|0\rangle$. Но в нашем случае имеем, например

$$\langle 1| : \phi_1\phi_2 : |1\rangle = \frac{1}{2m}\langle 1|a^\dagger a(e^{-imt_1}e^{imt_2} + e^{-imt_2}e^{imt_1})|1\rangle = \frac{1}{2m}\cos(m(t_1 - t_2)) \neq 0, \tag{0.13}$$

так как $\langle 1|a^\dagger a|1\rangle = 1$, в случае вакуума мы бы получили $\langle 0|aa^\dagger|0\rangle = 0$.