# Листок 4. Континуальный интеграл в Квантовой Механике

( Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **13.10.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu )

### ◯ 1. Евклидова корреляционная функция

**(a). (25 баллов)** Как мы знаем, если сделать поворот контура интегрирования по времени (поворот Вика) для пропагатора Фейнмана в пространстве Минковского: $t = -ix_4$, где $x_4$ действительная переменная, то мы получим выражение для Евклидового пропагатора:

$$D(x_E) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_E x_E}}{p_E^2 + m^2}, \tag{0.1}$$

где $p_E^2 = \vec{p}^2 + p_4^2$ и $x_E^2 = \vec{x}^2 + x_4^2$. Иногда удобно воспользоваться следующим приемом (Швингеровское представление), а именно записать $D(x_E)$, как

$$D(x_E) = \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{-\tau(p_E^2 + m^2)} e^{ip_E x_E}. \tag{0.2}$$

Покажите, что при $|x_E| \gg m^{-1}$:

$$D(x_E) \sim \frac{m^{1/2}}{|x_E|^{3/2}} e^{-m|x_E|}. \tag{0.3}$$

**(b). (25 баллов)** Используя представление Швингера вычислите $D(x_E)$ явно в терминах функций Бесселя.

### ◯ 2. Оператор эволюции (в мнимом времени $\tau = it$)

По определению, оператор эволюции $\hat{U}(\tau, \tau_0)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{U}(\tau, \tau_0) = \hat{H}(\tau) U(\tau, \tau_0), \qquad \hat{U}(\tau_0, \tau_0) = \hat{I}, \tag{0.4}$$

где $\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, \tau)$ — Гамильтониан нашей квантово-механической системы. Мы предполагаем, что спектр Гамильтониана ограничен снизу. Оператор эволюции существует только при $\tau \geqslant \tau_0$.

**(a). (25 баллов)** Проверьте, что оператор эволюции удовлетворяет свойству композиции:

$$\hat{U}(\tau, \tau_0) = \hat{U}(\tau, \tau_1) \hat{U}(\tau_1, \tau_0), \quad \tau \geqslant \tau_1 \geqslant \tau_0. \tag{0.5}$$

**(b). (25 баллов)** В координатном представлении $|q\rangle$ и для Гамильтониана вида $\hat{H} = \frac{1}{2} p^2 + V(q, \tau)$, уравнение для оператора эволюции запишется как

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \langle q | \hat{U}(\tau, \tau_0) | q' \rangle = \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q, \tau) \right) \langle q | \hat{U}(\tau, \tau_0) | q' \rangle, \quad \langle q | \hat{U}(\tau_0, \tau_0) | q' \rangle = \delta(q - q'). \tag{0.6}$$

Рассмотрим $\tau - \tau_0 = \Delta \to 0$, и записывая $\langle q | \hat{U}(\tau, \tau_0) | q' \rangle = e^{-\sigma(q, q' | \tau_0)}$, будем искать $\sigma(q, q' | \tau_0)$ в виде

$$\sigma(q, q' | \tau_0) = \frac{1}{\Delta} \sigma_0(q, q' | \tau_0) + a \log \Delta + b + \Delta \sigma_1(q, q' | \tau_0) + O(\Delta^2), \tag{0.7}$$

где $a, b$ — некоторые константы. Используя уравнения для оператора эволюции, покажите, что

$$\sigma_0(q, q' | \tau_0) = \frac{1}{2}(q - q')^2, \quad a = 1/2, \quad \sigma_1(q, q' | \tau_0) = \frac{1}{q - q'} \int_{q'}^{q} V(y | \tau_0) dy, \tag{0.8}$$

а также, что $b = \frac{1}{2} \log 2\pi$, которая определяется из условия $\langle q | \hat{U}(\tau_0, \tau_0) | q' \rangle = \delta(q - q')$.