Листок 3. Функции Грина

(Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **06.10.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

◯ 1. Функции Грина для Простого Гармонического Осциллятора (ПГО)

В этом упражнении мы будем изучать несколько разных функций Грина для одномерного ПГО. Обозначим координату ϕ, тогда Лагранжиан дается формулой

$$L = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{0.1}$$

(a). (10 баллов) Используйте выражение для Гейзенберговского оператора $\phi(t)$ в терминах операторов рождения и уничтожения, чтобы вычислить следующие функции Грина

$$\begin{aligned} G_R(t) &= \theta(t)\langle 0|[\phi(t), \phi(0)]|0\rangle, \\ G_A(t) &= -\theta(-t)\langle 0|[\phi(t), \phi(0)]|0\rangle, \\ G_F(t) &= \theta(t)\langle 0|\phi(t)\phi(0)|0\rangle + \theta(-t)\langle 0|\phi(0)\phi(t)|0\rangle. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Индексы R, A, F означают запаздывающая ("retarted"), опережающая ("advanced") и Фейнмановская ("Feynman") функции Грина, соответственно.

(b). (10 баллов) Покажите непосредственно из формул (0.2), что все функции G_R, G_A и G_F удовлетворяют уравнению

$$(\partial_t^2 + m^2)G_{R,A,F}(t) = -i\delta(t). \tag{0.3}$$

Поэтому они являются действительно функциями Грина для дифференциального оператора $\partial_t^2 + m^2$. Покажите, что все эти три функции Грина отличаются друг от друга решением однородного уравнения и что они могут быть классифицированы по их поведению при $t \to \pm\infty$.

(c). (10 баллов) Используйте преобразование Фурье $\tilde{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} G(t)$, чтобы решить (0.3). Заметьте, что у $\tilde{G}(\omega)$ много разных неопределенностей. Проанализируйте их и покажите, что они соответствуют добавлению решений однородного уравнения для $G(t)$. Используя это знание, запишите явное Фурье представление для функций Грина G_R, G_A и G_F.

◯ **2. (40 баллов) Пропагатор Фейнмана** Применяя дифференциальный оператор $\partial_\mu\partial^\mu + m^2$ к определению пропагатора Фейнмана $D_F(x)$:

$$D_F(\vec{x}, t) = \theta(t)\langle 0|\phi(\vec{x}, t)\phi(0, 0)|0\rangle + \theta(-t)\langle 0|\phi(0, 0)\phi(\vec{x}, t)|0\rangle \tag{0.4}$$

и используя коммутационные соотношения, получите уравнение

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)D_F(x) = -i\delta^{(4)}(x). \tag{0.5}$$

◯ **3. (30 баллов) Амплитуда для частицы поля Клейна-Гордона (П-Ш, з. 2.3)** Вычислите явно в терминах функции Бесселя, амплитуду перехода из точки y в точку x:

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{-ip\cdot(x-y)}, \quad E_{\vec{p}} = \sqrt{p^2+m^2} \tag{0.6}$$

для $(x-y)$ пространственно подобного, т.е. $(x-y)^2 = -r^2$.