Листок 1. Классическая теория поля
Решения

◯ 1. Классическая Теория Поля и Теорема Нётер (100 баллов)

(a). (15 баллов) • Преобразование имеет вид

$$\phi'(t) = e^{i\alpha}\phi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}'(t) = e^{i\alpha}\dot{\phi}(t). \tag{0.1}$$

Таким образом получаем для действия

$$S[\phi'(t)] = \int dt \left(\frac{1}{2}(e^{-i\alpha}\dot{\phi}^*(t))(e^{i\alpha}\dot{\phi}(t)) - \frac{1}{2}m^2(e^{-i\alpha}\phi^*(t))(e^{i\alpha}\phi(t)) \right) = S[\phi(t)]. \tag{0.2}$$

• Далее имеем

$$\phi = x + iy \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

— это матрица поворота на угол α (из группы $SO(2)$).
• Далее теперь имеем $\alpha(t) \ll 1$, следовательно

$$\begin{aligned} &\phi'(t) = e^{i\alpha(t)}\phi(t) = \phi(t) + i\alpha(t)\phi(t) + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ &\dot{\phi}'(t) = \dot{\phi}(t) + i\dot{\alpha}(t)\phi(t) + i\alpha(t)\dot{\phi}(t) + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \tag{0.4}$$

Находим для действия

$$\begin{aligned} S[\phi'(t)] = \int dt \Bigg[&\frac{1}{2}(\dot{\phi}^*(t) - i\dot{\alpha}(t)\phi^*(t) - i\alpha(t)\dot{\phi}^*(t))(\dot{\phi}(t) + i\dot{\alpha}(t)\phi(t) + i\alpha(t)\dot{\phi}(t)) - \\ &- \frac{1}{2}m^2(\phi^*(t) - i\alpha(t)\phi^*(t))(\phi(t) + i\alpha(t)\phi(t)) + \mathcal{O}(\alpha^2) \Bigg] = \\ =& S[\phi(t)] + \int dt \Bigg[- \frac{i\dot{\alpha}(t)}{2}(\phi^*(t)\dot{\phi}(t) - \dot{\phi}^*(t)\phi(t)) \Bigg] + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \tag{0.5}$$

Таким образом мы находим

$$Q(t) = -\frac{i}{2}(\phi^*(t)\dot{\phi}(t) - \dot{\phi}^*(t)\phi(t)). \tag{0.6}$$

• На уравнениях движения ("on-shell") вариация действия равна нулю $\delta S = 0$ для любого $\alpha(t)$, следовательно получаем:

$$\int dt\alpha(t)\dot{Q}(t) = 0,\ \forall\alpha(t), \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}(t) = 0 \quad \text{и поэтому} \quad Q(t) = Q \text{ сохраняющий заряд "on-shell”.} \tag{0.7}$$

• В обычных координатах x, y имеем для заряда

$$Q = -\frac{i}{2}\big((x - iy)(\dot{x} + i\dot{y}) - \text{к.с.}\big) = x\dot{y} - y\dot{x}, \tag{0.8}$$

данное выражение называется в физике моментом импульса. (аббревиатура к.с. означает комплексно сопряженная часть)

(b). (15 баллов) • Мы предполагаем, что мера d^4x инвариантна. Из инвариантности действия S мы получаем (здесь $\alpha = \text{const}$, не зависит от x)

$$\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \alpha \partial_\mu G^\mu. \tag{0.9}$$

Последнее слагаемое есть полная производная, поэтому при интегрировании по d^4x оно исчезает. Теперь пусть (здесь уже мы ввели зависящую от x функцию $\alpha(x)$)

$$\phi_i'(x) = \phi_i(x) + \alpha(x) F_i(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)), \tag{0.10}$$

тогда получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_i + \alpha(x) F_i(\phi, \partial_\mu \phi), \partial_\mu \phi_i(x) + \partial_\mu \alpha(x) F_i + \alpha(x) \partial_\mu F_i) = \\ = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \alpha(x) F_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} (\partial_\mu \alpha \, F_i + \alpha \, \partial_\mu F_i), \end{aligned} \tag{0.11}$$

но как мы знаем (это мы бы получили если бы α не зависело от x)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} F_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu F_i = \partial_\mu G^\mu. \tag{0.12}$$

Поэтому можно получить, что

$$\delta S = -\int d^4x \alpha(x) \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} F_i - G^\mu \right). \tag{0.13}$$

На уравнениях движения ("on-shell") $\delta S = 0$, следовательно

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} F_i - G^\mu, \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \tag{0.14}$$

(c). (25 баллов) • При $U(1)$ преобразованиях мы имеем (по аналогии с задачей **(b)**)

$$\delta\phi = i\alpha\phi, \quad \delta\phi^* = -i\alpha\phi^*, \quad G^\mu = 0, \tag{0.15}$$

откуда получаем

$$F_\phi = i\phi, \quad F_{\phi^*} = -i\phi^* \tag{0.16}$$

и следовательно сохраняющийся ток дается формулой

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} F_\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} F_{\phi^*} = (-\partial^\mu \phi^*)(i\phi) + (-\partial^\mu \phi)(-i\phi^*) = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*). \tag{0.17}$$

• При сдвигах (трансляциях) мы имеем

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad \Rightarrow \quad \phi'(x) = \phi(x - a), \tag{0.18}$$

следовательно

$$\delta_{a^\mu}\phi = -a^\mu\partial_\mu\phi(x), \quad \delta_{a^\mu}\phi^* = -a^\mu\partial_\mu\phi^*(x), \tag{0.19}$$

а также

$$\delta_{a^\mu}\mathcal{L} = -a^\mu\partial_\mu\mathcal{L} = -a^\mu\partial_\nu(\delta^\nu_\mu\mathcal{L}), \tag{0.20}$$

откуда получаем, что

$$G^\nu_{a^\mu} = -a^\mu\delta^\nu_\mu\mathcal{L}. \tag{0.21}$$

Таким образом для сохраняющегося тока находим (см. пункт **(b)**)

$$\begin{aligned} j^\nu_{a^\mu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\delta_{a^\mu}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi^*)}\delta_{a^\mu}\phi^* - G^\nu_{a^\mu} = \\ &= \partial^\nu\phi^*(-a^\mu\partial_\mu\phi) + \partial^\nu\phi(-a^\mu\partial_\mu\phi) + a^\mu\delta^\nu_\mu\mathcal{L} = \\ &= -a^\mu(\partial^\nu\phi^*\partial_\mu\phi + \partial_\mu\phi^*\partial^\nu\phi - \delta^\nu_\mu\mathcal{L}). \end{aligned} \tag{0.22}$$

Эти сохраняющиеся токи называются тензором энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \partial_\nu\phi^*\partial_\mu\phi + \partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}(\partial^\lambda\phi^*\partial_\lambda\phi - V(|\phi|)). \tag{0.23}$$

Заметим, что

$$T^{00} = \dot\phi^*\dot\phi + \partial_i\phi^*\partial_i\phi + V(|\phi|) = \mathcal{H} = (\text{Гамильтонова плотность}). \tag{0.24}$$

- При масштабных преобразованиях мы имеем

$$x' = \lambda x, \quad \phi'(x') = \lambda^{-1}\phi(x), \tag{0.25}$$

следовательно $d^4x' = \lambda^4 d^4x$, следовательно для инвариантности действия нам нужно, чтобы $\mathcal{L}' = \lambda^{-4}\mathcal{L}$. С другой стороны мы имеем

$$\mathcal{L}' = \lambda^{-4}\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - V(\lambda^{-1}|\phi|), \tag{0.26}$$

следовательно мы должны потребовать

$$V(\lambda^{-1}|\phi|) = \lambda^{-4}V(|\phi|), \tag{0.27}$$

откуда получаем, что

$$V(|\phi|) \sim |\phi|^4 \tag{0.28}$$

и в нашей теории не должно быть никакого массово члена $\sim |\phi|^2$. Для того чтобы найти Нетеровский ток рассмотрим вариацию

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \lambda^{-1}\phi(\lambda^{-1}x) - \phi(x). \tag{0.29}$$

Если $\lambda = 1 + \delta\lambda$, то мы получим

$$\delta\phi(x) = -\delta\lambda(\phi(x) + x^\mu\partial_\mu\phi(x)). \tag{0.30}$$

И аналогично

$$\partial'_\mu \phi'(x') = \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial(\lambda x)^\mu} \phi(x) = \lambda^{-2} \partial_\mu \phi(x), \tag{0.31}$$

следовательно

$$\delta(\partial_\mu \phi(x)) = \lambda^{-2} \partial_\mu \phi(\lambda^{-1} x) - \phi(x) = -\delta\lambda(2\partial_\mu \phi(x) + x^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi(x)). \tag{0.32}$$

Таким образом мы получаем

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \partial^\mu \phi^* (-\delta\lambda)(2\partial_\mu \phi + x^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi) + \partial^\mu \phi(-\delta\lambda)(2\partial^\mu \phi^* + x^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi^*) - 2V(|\phi|)(-\delta\lambda)(2 + x^\nu \partial_\nu \log|\phi|^2) = \\ &= -4\delta\lambda(\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V(|\phi|)) - \delta\lambda\, x^\nu \partial_\nu (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V(|\phi|)) = -\delta\lambda\, \partial_\nu \big(x^\nu (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V(|\phi|)) \big). \end{aligned} \tag{0.33}$$

Откуда мы получаем

$$G^\mu = -x^\mu (\partial^\nu \phi^* \partial_\nu \phi - V(|\phi|)). \tag{0.34}$$

И для тока имеем

$$\begin{aligned} j^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\phi + x^\nu \partial_\nu \phi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} (\phi^* + x^\nu \partial_\nu \phi^*) - G^\mu = \\ &= -\partial^\mu \phi^* (\phi + x^\nu \partial_\nu \phi) - \partial^\mu \phi (\phi^* + x^\nu \partial_\nu \phi^*) + x^\mu (\partial^\nu \phi^* \partial_\nu \phi - V(|\phi|)). \end{aligned} \tag{0.35}$$

В терминах $T^{\mu\nu}$ находим

$$j^\mu = -x_\nu T^{\mu\nu} - \partial^\mu |\phi|^2. \tag{0.36}$$

Используя тот факт, что $\partial_\mu |\phi|^2$ можно записать как

$$\partial_\mu |\phi|^2 = -\frac{1}{3} x^\nu (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial^2) |\phi|^2 + \frac{1}{3} \partial^\rho \big((x_\rho \partial_\mu - x_\mu \partial_\rho) |\phi|^2 \big), \tag{0.37}$$

мы можем переписать ток в виде

$$j^\mu = -x_\nu \hat{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{3} \partial_\rho \big((x^\rho \partial^\mu - x^\mu \partial^\rho) |\phi|^2 \big), \quad \hat{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{1}{3} (\partial^\mu \partial^\nu - \eta^{\mu\nu} \partial^2) |\phi|^2. \tag{0.38}$$

Добавки которые получили ток и тензор энергии-импульса называются улучшающими членами ("improvement terms").

(d). (15 баллов) В данном случае мы имеем

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \phi(x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu) = \phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x), \\ \partial_\mu \phi'(x) &= \partial_\mu \phi(x) - \omega^\lambda{}_\nu x^\nu \partial_\mu \partial_\lambda \phi(x) - \omega^\lambda{}_\mu \partial_\lambda \phi(x). \end{aligned} \tag{0.39}$$

Таким образом с одной стороны для Лагранжевой плотности мы получаем

$$\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \omega^\lambda{}_\nu x^\nu \partial_\mu \partial_\lambda \phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \omega^\lambda{}_\mu \partial_\lambda \phi. \tag{0.40}$$

С другой стороны

$$\mathcal{L}(x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu) = \mathcal{L}(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \mathcal{L}. \tag{0.41}$$

Откуда получим

$$\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\omega^{\lambda}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\omega^{\lambda}{}_{\mu}\partial_{\lambda}\phi. \tag{0.42}$$

Далее используя уравнение движения (Эйлера-Лагранжа):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_{\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\lambda}\phi)}, \tag{0.43}$$

можно получить

$$\omega^{\mu}{}_{\nu}\big(\partial_{\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\lambda}\phi)}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\lambda}\phi)}x^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi)}\partial_{\mu}\phi - x^{\nu}\partial_{\mu}\mathcal{L}\big) = 0. \tag{0.44}$$

Далее заметим, что полученное выражение можно записать в виде

$$\omega^{\mu}{}_{\nu}\partial_{\lambda}\big(x^{\nu}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\lambda}\phi)}\partial_{\mu}\phi - \delta^{\lambda}_{\mu}\mathcal{L})\big) = \omega_{\mu\nu}\partial_{\lambda}(x^{\nu}T^{\lambda\mu}) = 0. \tag{0.45}$$

Так как $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ мы можем окончательно записать

$$\omega_{\mu\nu}\partial_{\lambda}(x^{\nu}T^{\lambda\mu} - x^{\mu}T^{\lambda\nu}) = 0. \tag{0.46}$$

Это равенство выполняется для произвольного антисимметричного $\omega_{\mu\nu}$, следовательно мы получаем сохраняющийся Нетеровский ток

$$M^{\lambda\mu\nu} = x^{\mu}T^{\lambda\nu} - x^{\nu}T^{\lambda\mu}. \tag{0.47}$$

Заметим, что то, что данный ток сохраняется сразу дает ответ на пункт **(f)**, так как

$$0 = \partial_{\lambda}M^{\lambda\mu\nu} = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}, \tag{0.48}$$

но мы решим пункт **(f)** похожим, но немного другим способом.

(e). (15 баллов) В данном случае для векторного поля A_{μ} мы получаем

$$\begin{aligned} A'_{\mu}(x) &= (\delta^{\nu}_{\mu} + \omega_{\mu}{}^{\nu})A_{\nu}(x^{\lambda} - \omega^{\lambda}{}_{\rho}x^{\rho}) = A_{\mu}(x) - \omega^{\lambda}{}_{\rho}x^{\rho}\partial_{\lambda}A_{\mu}(x) + \omega_{\mu}{}^{\nu}A_{\nu}(x), \\ \partial_{\nu}A'_{\mu}(x) &= \partial_{\nu}A_{\mu}(x) - \omega^{\lambda}{}_{\nu}\partial_{\lambda}A_{\mu}(x) - \omega^{\lambda}{}_{\rho}x^{\rho}\partial_{\lambda}\partial_{\nu}A_{\mu}(x) + \omega_{\mu}{}^{\lambda}\partial_{\nu}A_{\lambda}(x). \end{aligned} \tag{0.49}$$

Ход решения аналогичен пункту **(d)**, за исключением того, что векторное поле приобретает дополнительные поправки, связанные с "векторностью", или можно сказать, связанные со спином $s = 1$. Лагранжева плотность, являясь скаляром, преобразуется как и раньше:

$$\mathcal{L}(x^{\mu} - \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}) = \mathcal{L}(x) - \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\mathcal{L}. \tag{0.50}$$

Далее следуя ходу решения задачи **(d)** получаем

$$0 = -\omega_{\mu\nu}\partial_{\lambda}(x^{\nu}T^{\lambda\mu} - x^{\mu}T^{\lambda\nu}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu}}\omega_{\mu}{}^{\lambda}A_{\lambda} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}A_{\mu})}\omega_{\mu}{}^{\lambda}\partial_{\nu}A_{\lambda}. \tag{0.51}$$

Используя уравнения движения

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} = \partial_{\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\sigma}A_{\mu})}, \tag{0.52}$$

находим ($\omega_\mu{}^\lambda = -\omega^\lambda{}_\mu$)

$$0 = -\omega_{\mu\nu}\partial_\lambda(x^\nu T^{\lambda\mu} - x^\mu T^{\lambda\nu}) - \omega^\lambda{}_\mu\big(\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\mu)} A_\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\partial_\nu A_\lambda\big) =$$
$$= -\omega_{\mu\nu}\partial_\lambda(x^\nu T^{\lambda\mu} - x^\mu T^{\lambda\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} A^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\nu)} A^\mu). \tag{0.53}$$

Откуда получаем

$$M^{\lambda\mu\nu} = x^\mu T^{\lambda\mu} - x^\nu T^{\lambda\mu} + S^{\lambda\mu\nu} = x^\mu T^{\lambda\mu} - x^\nu T^{\lambda\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\nu)} A^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} A^\nu. \tag{0.54}$$

Изначально задача была сформулирована в очень замысловатом варианте: $M^{\lambda\mu\nu} = x^\mu \Theta^{\lambda\nu} - x^\nu \Theta^{\lambda\mu}$, где $\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}$ тензор Белинфанте. Такой подход осложняет понимание материала и может быть найден в книге Вайнберга 1 том п.7.

(f). (15 баллов) В данном случае мы имеем

$$\begin{aligned} &\phi'(x') = \phi(x), \\ &\partial'_\mu \phi'(x') = \partial_\mu \phi(x) - \omega^\nu{}_\mu \partial_\nu \phi(x). \end{aligned} \tag{0.55}$$

Тогда получим

$$0 = \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \omega^\nu{}_\mu \partial_\nu \phi = -\omega_{\nu\mu}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}), \tag{0.56}$$

откуда

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \tag{0.57}$$