Листок 10. Перенормировки в теории ϕ^4

Решения

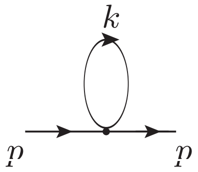
◯ 1. (100 баллов) Кактусные диаграммы Фейнмана

В этой задаче мы будем изучать перенормировку массы в теории ϕ^4 в 3 мерном Евклидовом пространстве, на примере кактусных диаграмм (также они часто называются “daisy” диаграммы в англоязычной литературе). Статистическая сумма нашей теории записывается как

$$Z = \int D\phi \exp\big(- \int d^3x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4)\big), \tag{0.1}$$

где m_0 называется “затравочной"(“голой”) массой.

(a). (30 баллов) Рассмотрим поправку первого порядка к пропагатору поля ϕ. А именно рассмотрим первую диаграмму, которая дает вклад в собственную энергетическую часть $\tilde{\Sigma}(p)$:

$-\tilde{\Sigma}(p) =$  $= -\frac{\lambda}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2+m_0^2}$

Как мы видим, данный интеграл расходится. Устранить данную расходимость мы можем многими способами, например введя регулятор $\Phi_{\Lambda^2}(k^2)$:

$$\tilde{\Sigma}(p) = \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2+m_0^2}\Phi_{\Lambda^2}(k^2). \tag{0.2}$$

Другой способ устранения расходимости, есть по сути выбор регулятора в виде $\Phi_{\Lambda^2}(k^2) = \theta(\Lambda^2 - k^2)$, где $\theta(x)$ — тета-функция Хевисайда (“ступенька”). Тогда мы схематически можем записать

$$\tilde{\Sigma}(p) = \frac{\lambda}{2}\int^{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2+m_0^2}. \tag{0.3}$$

Второй оригинальный способ устранить расходимость называется регуляризацией Паули-Вилларса, а именно мы записываем

$$\frac{1}{k^2+m_0^2} \to \frac{1}{k^2+m_0^2} - \frac{1}{k^2+M^2}, \tag{0.4}$$

где $M \gg m$. И последний способ, который мы рассмотрим в данном примере называется размерной регуляризацией: идея состоит в том, что мы можем рассмотреть интеграл по k в пространстве произвольной размерности d:

$$I(d) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m_0^2}. \tag{0.5}$$

Очевидно, что при $d = 1$, данный интеграл сходится. Далее оказывается, что для данного интеграла $I(d)$ можно найти общий ответ в виде аналитической функции при любом действительном

d[1]. Замечательным свойством является то, что мы можем вычислить эту функцию при $d \to 3$ и получить конечный "регуляризованный" ответ. Вычислим собственную энергетическую часть $\tilde{\Sigma}(p)$ для всех трех регуляризаций. Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(p) &= \frac{\lambda}{2}\frac{4\pi}{8\pi^3}\int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{k^2+m_0^2} = \frac{\lambda}{4\pi^2}\Big(\int_0^\Lambda dk - \int_0^\Lambda \frac{m_0^2}{k^2+m_0^2}dk\Big) = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi^2}\big(\Lambda - m_0 \arctan(\frac{k}{m_0})|_0^\Lambda\big) = \frac{\lambda}{4\pi^2}\big(\Lambda - m_0\arctan(\frac{\Lambda}{m_0})\big) \approx \\ &\approx \frac{\lambda}{4\pi^2}\big(\Lambda - \frac{\pi}{2}m_0 + \frac{m_0^2}{\Lambda} - \frac{m_0^4}{3\Lambda^3}\big) = \frac{\lambda}{4\pi^2}\Lambda - \frac{\lambda}{8\pi}m_0 + \frac{\lambda}{4\pi^2}\frac{m_0^2}{\Lambda} - \frac{\lambda}{12\pi^2}\frac{m_0^4}{\Lambda^3} + O(1/\Lambda^5). \end{aligned} \tag{0.6}$$

Далее имеем:

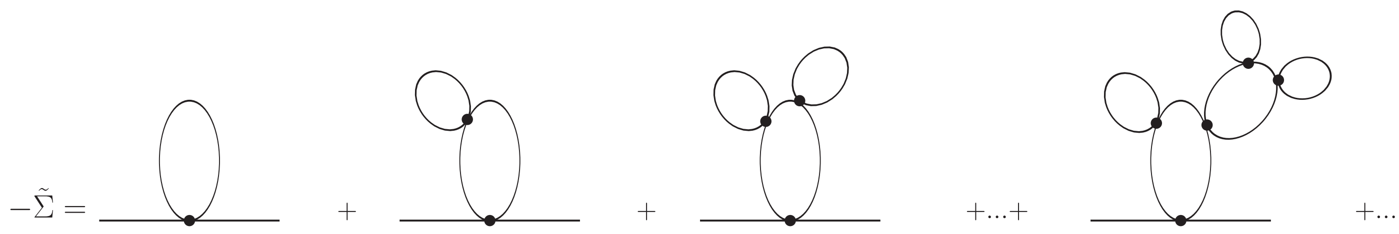
$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(p) &= \frac{\lambda}{4\pi^2}\int_0^\Lambda k^2 dk\big(\frac{1}{k^2+m_0^2} - \frac{1}{k^2+M^2}\big) = \frac{\lambda}{4\pi^2}\big(M\arctan\frac{k}{M} - m_0\arctan\frac{k}{m_0}\big)|_0^\infty = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi^2}\big(\frac{\pi}{2}M - \frac{\pi}{2}m_0\big) = \frac{\lambda}{8\pi}M - \frac{\lambda}{8\pi}m_0. \end{aligned} \tag{0.7}$$

И в последнем случае получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(p) &= \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m_0^2} = \frac{\lambda}{2}\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^\infty \frac{k^{d-1}dk}{k^2+m_0^2} = \frac{\lambda}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty dt\int_0^\infty dk k^{d-1}e^{-t(k^2+m_0^2)} = \\ &= \frac{\lambda}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty dt e^{-tm_0^2}\int_0^\infty \frac{dx}{2t}(x/t)^{\frac{d-2}{2}}e^{-x} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty dt e^{-tm_0^2}\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{t^{d/2}} = \\ &= \frac{\lambda}{2(4\pi)^{d/2}}\int_0^\infty dt t^{-d/2}e^{-tm_0^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^{d/2}}(m_0^2)^{\frac{d}{2}-1}\Gamma(1-\frac{d}{2}) \overset{d\to 3}{=} -\frac{\lambda}{8\pi}m_0. \end{aligned} \tag{0.8}$$

Мы видим, что размерная регуляризиация дает нам первую инвариантную константу и не содержит в данном случае расходящихся членов.

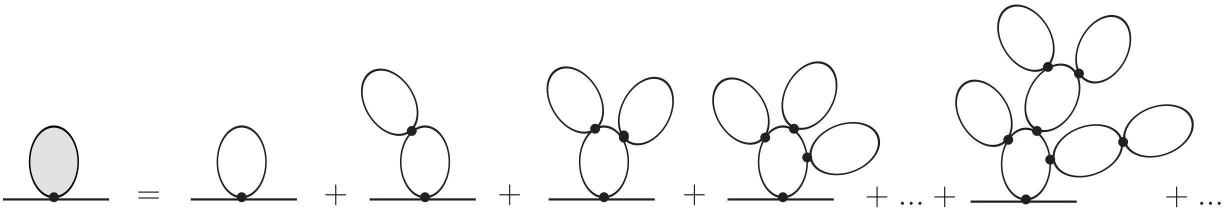
(b). (50 баллов) Теперь рассмотрим бесконечный ряд "кактусных" диаграмм, которые дают вклад в $\tilde{\Sigma}(p)$:



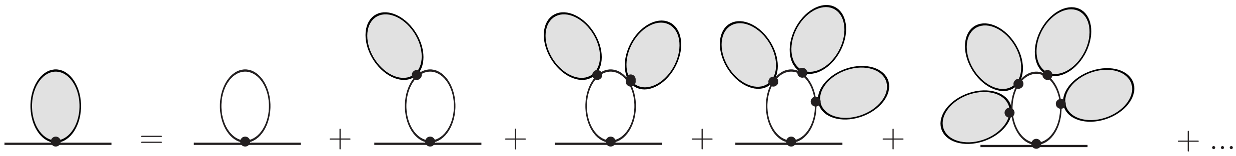
Очевидно, что это далеко не все диаграммы которые дают вклад в $\tilde{\Sigma}(p)$, а только лишь их некоторое ничтожно малое подмножество[2]. Найдем сумму всех таких диаграмм. Получим самосогласованное уравнение (уравнение Дайсона) на $\tilde{\Sigma}(p)$ вида (как мы видим в данном случае $\tilde{\Sigma}$ не зависит от внешнего импульса p). Введем понятие перенормированного "кактуса":

[1]Мы это уже делали в Листке 2, когда вычисляли эффект Казимира: там был интеграл, который сводился к произведению Гамма функций, на самом деле формально данный интеграл не сходился, но тем не менее мы получили для него ответ в виде аналитичекой фунции.

[2]Существуют теории, в которых данное подмножество "кактусных" диаграмм дает основной вклад в $\tilde{\Sigma}(p)$, но в нашем случае ϕ^4 это не так.

$-\tilde{\Sigma} =$ 

Тогда на такой перенормированный “кактус” можно написать самосогласованное уравнение, которое диаграммно рисуется как:



Откуда получается самосогласованное уравнение

$$-\tilde{\Sigma} = -\frac{\lambda}{2}\int d^3k\big(\frac{1}{k^2+m_0^2} + \frac{1}{k^2+m_0^2}(-\tilde{\Sigma})\frac{1}{k^2+m_0^2} + \frac{1}{k^2+m_0^2}(-\tilde{\Sigma})\frac{1}{k^2+m_0^2}(-\tilde{\Sigma})\frac{1}{k^2+m_0^2} + ...\big) =$$
$$= -\frac{\lambda}{2}\int d^3k\frac{1}{k^2+m_0^2+\tilde{\Sigma}}, \tag{0.9}$$

и в итоге

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\lambda}{2}\int d^3k\frac{1}{k^2+m_0^2+\tilde{\Sigma}}, \tag{0.10}$$

(c). (20 баллов) Найдем $m^2 - m_0^2 = \tilde{\Sigma}(p)$ из уравнения (0.10), вычисляя интеграл с применением регуляризаций из пункта (a). Имеем в первом случае

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\lambda}{4\pi^2}\big(\Lambda - \sqrt{m_0^2+\tilde{\Sigma}}\arctan(\frac{\Lambda}{\sqrt{m_0^2+\tilde{\Sigma}}})\big). \tag{0.11}$$

Или для перенормированной массы m^2 получим уравнение

$$m^2 = m_0^2 + \frac{\lambda}{4\pi^2}\big(\Lambda - m\arctan(\frac{\Lambda}{m})\big). \tag{0.12}$$

В итоге получим в первом порядке ($\lambda\Lambda \gg m_0$):

$$m^2 \approx \frac{\lambda}{4\pi^2}\Lambda - \frac{\lambda^{3/2}}{16\pi^2}\Lambda^{1/2}. \tag{0.13}$$

Во втором случаем получаем:

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\lambda}{8\pi}M - \frac{\lambda}{8\pi}\sqrt{\tilde{\Sigma}+m_0^2}, \tag{0.14}$$

откуда

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\lambda}{8\pi}\left(M + \frac{\lambda}{16\pi} - \sqrt{(\frac{\lambda}{16\pi})^2 + 2M(\frac{\lambda}{16\pi}) + m_0^2}\right). \tag{0.15}$$

Мы выбрали знак минус в решении для $\tilde{\Sigma}$, чтобы при $\lambda \to 0$ получить выражение для $\tilde{\Sigma}$ из пункта (a). Если опять $M \gg \lambda, m_0^2/\lambda$, мы получим

$$\tilde{\Sigma} \approx \frac{\lambda M}{8\pi} - \frac{\lambda^{3/2}}{16\sqrt{2}\pi^{3/2}} M^{1/2} + \frac{\lambda^2}{128\pi^2}. \tag{0.16}$$

В последнем случаем мы получаем

$$\tilde{\Sigma} = -\frac{\lambda}{8\pi}\sqrt{\tilde{\Sigma} + m_0^2}, \tag{0.17}$$

откуда

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\lambda}{8\pi}\Big(\frac{\lambda}{16\pi} - \sqrt{(\frac{\lambda}{16\pi})^2 + m_0^2}\Big). \tag{0.18}$$