Листок 10. Перенормировки в теории ϕ^4

(Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **01.12.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

○ 1. (100 баллов) Кактусные диаграммы Фейнмана

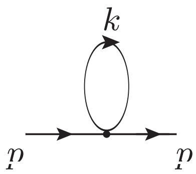
В этой задаче мы будем изучать перенормировку массы в теории ϕ^4 в 3 мерном Евклидовом пространстве, на примере кактусных диаграмм (также они часто называются "daisy" диаграммы в англоязычной литературе). Статистическая сумма нашей теории записывается как

$$Z = \int D\phi \exp\big(- \int d^3x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4)\big), \tag{0.1}$$

где m_0 называется "затравочной"("голой") массой.

(a). (30 баллов) Рассмотрим поправку первого порядка к пропагатору поля ϕ. А именно рассмотрим первую диаграмму, которая дает вклад в собственную энергетическую часть $\tilde{\Sigma}(p)$:

$$-\tilde{\Sigma}(p) =$$



$$= -\frac{\lambda}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2+m_0^2}$$

Как мы видим, данный интеграл расходится. Устранить данную расходимость мы можем многими способами, например введя регулятор $\Phi_{\Lambda^2}(k^2)$:

$$\tilde{\Sigma}(p) = \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2+m_0^2}\Phi_{\Lambda^2}(k^2). \tag{0.2}$$

Другой способ устранения расходимости, есть по сути выбор регулятора в виде $\Phi_{\Lambda^2}(k^2) = \theta(\Lambda^2 - k^2)$, где $\theta(x)$ — тета-функция Хевисайда ("ступенька"). Тогда мы схематически можем записать

$$\tilde{\Sigma}(p) = \frac{\lambda}{2}\int^{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2+m_0^2}. \tag{0.3}$$

Второй оригинальный способ устранить расходимость называется регуляризацией Паули-Вилларса, а именно мы записываем

$$\frac{1}{k^2+m_0^2} \to \frac{1}{k^2+m_0^2} - \frac{1}{k^2+M^2}, \tag{0.4}$$

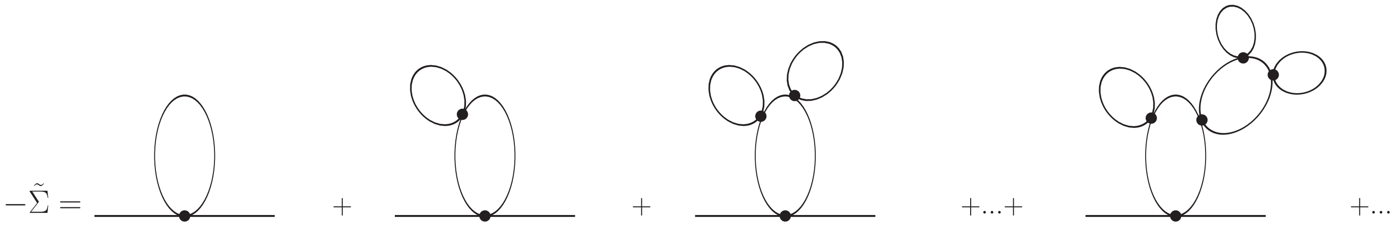
где $M \gg m$. И последний способ, который мы рассмотрим в данном примере называется размерной регуляризацией: идея состоит в том, что мы можем рассмотреть интеграл по k в пространстве произвольной размерности d:

$$I(d) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m_0^2}. \tag{0.5}$$

Очевидно, что при $d = 1$, данный интеграл сходится. Далее оказывается, что для данного интеграла $I(d)$ можно найти общий ответ в виде аналитической функции при любом действительном

d[1]. Замечательным свойством является то, что мы можем вычислить эту функцию при $d \to 3$ и получить конечный "регуляризованный" ответ. Вычислите собственную энергетическую часть $\tilde{\Sigma}(p)$ для всех трех регуляризаций.

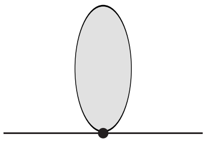
(b). (50 баллов) Теперь рассмотрим бесконечный ряд "кактусных" диаграмм, которые дают вклад в $\tilde{\Sigma}(p)$:



Очевидно, что это далеко не все диаграммы которые дают вклад в $\tilde{\Sigma}(p)$, а только лишь их некоторое ничтожно малое подмножество[2]. Найдите сумму всех таких диаграмм. Вы должны получить самосогласованное уравнение (уравнение Дайсона) на $\tilde{\Sigma}(p)$ вида (как мы видим в данном случае $\tilde{\Sigma}$ не зависит от внешнего импульса p):

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{k^2 + m_0^2 + \tilde{\Sigma}}. \tag{0.6}$$

Нарисуйте данное самосогласованное уравнение на диаграммном языке, введя понятие перенормированного "кактуса", который по сути и есть $-\tilde{\Sigma}(p)$:



(c). (20 баллов) Найдите $m^2 - m_0^2 = \tilde{\Sigma}(p)$ из уравнения (0.6), вычисляя интеграл с применением регуляризаций из пункта (a). Как отличаются ответы при разных регуляризациях?

[1]Мы это уже делали в Листке 2, когда вычисляли эффект Казимира: там был интеграл, который сводился к произведению Гамма функций, на самом деле формально данный интеграл не сходился, но тем не менее мы получили для него ответ в виде аналитичекой фунции.

[2]Существуют теории, в которых данное подмножество "кактусных" диаграмм дает основной вклад в $\tilde{\Sigma}(p)$, но в нашем случае ϕ^4 это не так.