Упражнения к лекции 3. Лоренц инвариантность (Параграф 2 в книжке Средницкого)

Итак преобразование Лоренца это линейная однородная замена координат

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{0.1}$$

которая сохраняет интервал $x^2 = x^{\mu}x_{\mu} = \eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$, где $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Это означает, что

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}. \tag{0.2}$$

Заметим, преобразования Лоренца включают в себя обычные пространственные вращения: для это возьмем $\Lambda^{0}{}_{0} = 1$, $\Lambda^{0}{}_{i} = \Lambda^{i}{}_{0} = 0$, и $\Lambda^{i}{}_{j} = R_{ij}$, где R_{ij} ортогональная матрица поворотов трехмерного пространства.

Для инфинитезимальных преобразования Лоренца мы можем записать

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}, \tag{0.3}$$

где

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \tag{0.4}$$

То есть есть 6 независимых инфинитезимальных преобразований Лоренца. Это три поворота $\omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\hat{n}_k\delta\theta$ на угол $\delta\theta$ относительно оси $\hat{n}$ и три буста $\omega_{i0} = \hat{n}_i\delta\eta$ в направлении $\hat{n}$ с быстротой $\delta\eta$.

◯ **Упражнение 1.** Проверьте, что (0.4) следует из (0.2).

Решение: Подставляем (0.3) в (0.2) и получаем

$$\eta_{\mu\nu}(\delta^{\mu}{}_{\rho} + \omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\nu}{}_{\sigma} + \omega^{\nu}{}_{\sigma}) = \eta_{\rho\sigma}, \tag{0.5}$$

откуда

$$\eta_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + O(\omega^2) = \eta_{\sigma\rho} \tag{0.6}$$

и находим $\omega_{\sigma\rho} = -\omega_{\rho\sigma}$. ◯

В квантовой теории поля симметрии представляются унитарными (или антиунитарными) операторами. Это значит, что мы сопоставляем оператор $U(\Lambda)$ каждому правильному ортохроному преобразованию Лоренца Λ ($\Lambda^{0}{}_{0} \geqslant 1$, $\det\Lambda = 1$). Эти операторы должны удовлетворять свойству

$$U(\Lambda'\Lambda) = U(\Lambda')U(\Lambda). \tag{0.7}$$

Для инфинитезимальных преобразований Лоренца мы можем записать

$$U(1+\omega) = I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, \tag{0.8}$$

где $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ набор эрмитовых операторов, которые называются генераторами группы Лоренца. Теперь рассмотрим $U(\Lambda)^{-1}U(\Lambda')U(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda)$, и пусть $\Lambda' = 1 + \omega'$, и разложим обе части этого равенства до линейных по ω членов. Мы получим

$$\omega_{\mu\nu}U(\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = \omega_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma}. \tag{0.9}$$

Далее, так как $\omega_{\mu\nu}$ произвольно, то анитисимметричная часть ее сомножителей на каждой стороне уравнения должна быть одинаковой. В данном случае, так как $M^{\mu\nu}$ уже само антисимметрично мы получаем

$$U(\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma}. \tag{0.10}$$

◯ **Упражнение 2.** Проверьте, что (0.10) следует из $U(\Lambda)^{-1}U(\Lambda')U(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda)$.
Решение: Имеем

1. $U(\Lambda)^{-1}U(1+\omega')U(\Lambda) = U(\Lambda)^{-1}(I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu})U(\Lambda) = I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}U(\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda)$,
2. $U(\Lambda^{-1}(1+\omega)\Lambda) = U(\delta^{\rho}{}_{\sigma} + (\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu}\omega^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}) = U(\delta^{\rho}{}_{\sigma} + \omega^{\mu}{}_{\nu}\Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}) = U(\delta^{\rho}{}_{\sigma} + \omega_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}) =$
$$= I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma}, \tag{0.11}$$

откуда получаем сначала (0.9), а потом уже (0.10). ◯

То есть мы видим, что каждый векторный индекс у $M^{\mu\nu}$ преобразуется по его собственному преобразованию Лоренца. Это общий результат: любой оператор который несет один или более векторных индексов должен преобразовываться подобным образом. Например, рассмотрим оператор момента $P^{\mu} = \int d^3xT^{0\mu}$, где $P^0 = H$ — гамильтониан, а P^i компоненты оператора полного импульса. Мы ожидаем, что

$$U(\Lambda)^{-1}P^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}. \tag{0.12}$$

Теперь пусть $\Lambda = 1 + \omega$ в уравнении (0.10), тогда раскладывая его до линейных по ω членов мы получим коммутационное соотношения на операторы $M^{\mu\nu}$:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \tag{0.13}$$

Эти коммутационные соотношения определяют алгебру Ли группы Лоренца.

◯ **Упражнение 3.** Проверьте, что (0.13) следует из (0.10).
Решение: Имеем

$$\begin{aligned}
&1.\ U(1+\omega)^{-1}M^{\mu\nu}U(1+\omega) = (I - \frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}M^{\sigma\rho})M^{\mu\nu}(I + \frac{i}{2}\omega_{\lambda\delta}M^{\lambda\delta}) = M^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}[M^{\mu\nu}, M^{\sigma\rho}] + O(\omega^2),\\
&2.\ (\delta^{\mu}{}_{\rho} + \omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\nu}{}_{\sigma} + \omega^{\nu}{}_{\sigma})M^{\rho\sigma} = M^{\mu\nu} + \omega^{\mu}{}_{\rho}M^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\sigma}M^{\mu\sigma} + O(\omega^2) = M^{\mu\nu} + \omega_{\sigma\rho}\eta^{\mu\sigma}M^{\rho\nu} - \omega_{\sigma\rho}\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}.
\end{aligned} \tag{0.14}$$

После антисимметризации части 2. получаем (0.13). ◯

Введем компоненты оператора момента импульса $\boldsymbol{J}$ по формуле $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk}$ и компоненты оператора буста $\boldsymbol{K}$ по формуле $K_i = M^{i0}$. Тогда мы можем найти используя (0.13):

$$\begin{aligned}
&[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k\\
&[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k,\\
&[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k.
\end{aligned} \tag{0.15}$$

◯ **Упражнение 4.** Выведите уравнения (0.15).

Решение: Покажем, что $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ ($\epsilon_{123} = -\epsilon^{123} = 1$). Имеем

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= \frac{1}{4}\epsilon_{imn}\epsilon_{jst}[M^{mn}, M^{st}] = \frac{i}{4}\epsilon_{imn}\epsilon_{jst}(\eta^{mt}M^{ns} - \eta^{ms}M^{nt} + \eta^{ns}M^{mt} - \eta^{nt}M^{ms}) = \\ &= -\frac{i}{4}\epsilon_{imn}\epsilon_{jst}(\delta^{mt}M^{ns} - \delta^{ms}M^{nt} + \delta^{ns}M^{mt} - \delta^{nt}M^{ms})\end{aligned} \tag{0.16}$$

Далее заметим, что $M^{ij} = -\epsilon^{ijk}J_k$ (мы поднимаем и опускаем индексы с помощью $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, поэтому так как здесь мы работаем с индексами $i = 1, 2, 3$, с каждым поднятием индекса мы зарабатываем фактор (-1)), откуда получаем

$$[J_i, J_j] = \frac{i}{4}(\epsilon_{imn}\epsilon_{jsm}\epsilon^{nsk}J_k - \epsilon_{imn}\epsilon_{jmt}\epsilon^{ntk}J_k + \epsilon_{imn}\epsilon_{jnt}\epsilon^{mtk}J_k - \epsilon_{imn}\epsilon_{jsn}\epsilon^{msk}J_k) \tag{0.17}$$

Далее используя, что $\epsilon_{ijs}\epsilon_{mns} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{im}\delta_{jm}$, находим

$$\begin{aligned}&[J_i, J_j] = \\ &= \frac{i}{4}((\delta_{is}\delta_{nj} - \delta_{ij}\delta_{ns})\epsilon^{nsk}J_k - (\delta_{ij}\delta_{nt} - \delta_{it}\delta_{nj})\epsilon^{ntk}J_k + (\delta_{it}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{mt})\epsilon^{mtk}J_k - (\delta_{ij}\delta_{ms} - \delta_{is}\delta_{mj})\epsilon^{msk}J_k) = \\ &= \frac{i}{4}(\epsilon^{jik}J_k + \epsilon^{jik}J_k + \epsilon^{jik}J_k + \epsilon^{jik}J_k) = -i\epsilon^{ijk}J_k = i\epsilon_{ijk}J_k.\end{aligned} \tag{0.18}$$

В итоге мы получили, что $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$. ◯

Далее из уравнения (0.12), мы можем получить при $\Lambda = 1 + \omega$:

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho) \tag{0.19}$$

◯ **Упражнение 5.** Выведите (0.19) из (0.12).

Решение: Имеем

$$\begin{aligned}&1.\ (I - \frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}M^{\sigma\rho})P^\mu(I + \frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}M^{\sigma\rho}) = P^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}[P^\mu, M^{\sigma\rho}] + O(\omega^2), \\ &2.\ (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu)P^\nu = P^\mu + \omega^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu + \omega_{\sigma\rho}\eta^{\mu\sigma}P^\rho = P^\mu + \frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}(\eta^{\mu\sigma}P^\rho - \eta^{\mu\rho}P^\sigma)\end{aligned} \tag{0.20}$$

Сравнивая выражения 1. и 2. получаем (0.19). ◯

Из формулы (0.19) можно получить

$$\begin{aligned}&[J_i, H] = 0, \\ &[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \\ &[K_i, H] = iP_i, \\ &[K_i, P_j] = i\delta_{ij}H\end{aligned} \tag{0.21}$$

◯ **Упражнение 6.** Выведите уравнения (0.21) из (0.19).

Решение: Получим, что $[K_i, H] = iP_i$. Имеем:

$$[K_i, H] = [M^{i0}, P^0] = -i(\eta^{0i}P^0 - \eta^{00}P^i) = iP^i \tag{0.22}$$

Остальные выражения получаются аналогично. ◯

Также компоненты P^μ должны коммутировать с друг другом

$$[P_i, P_i] = 0,$$
$$[P_i, H] = 0. \tag{0.23}$$

Уравнения (0.15), (0.21), и (0.23) образуют алгебру Ли группы Пуанкаре.

◯ **Упражнение 7.** Покажите, что мера

$$d\mu(p) = \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}, \quad E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \tag{0.24}$$

Лоренц инвариантна

Решение:

$$d\mu(p) = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} = \int_{p_0>0} dp^0 \delta((p^0)^2 - E_p^2) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} = \int_{p_0>0} \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \tag{0.25}$$

далее очевидно, что если мы перейдем к $p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$, то $p^2 = p'^2$ и $d^4p = d^4p'$ и соответственно $d\mu(p) = d\mu(p')$. ◯