Упражнения к лекции 1. Интегралы движения как генераторы симметрии

По аналогии с классической механикой, обобщенный импульс в теории поля можно записать, как

$$\pi_i(\vec{x},t) = \frac{\delta \int d^3\vec{y}\,\mathcal{L}(\phi_k(\vec{y},t), \partial_\mu\phi_k(\vec{y},t))}{\delta\dot{\phi}_i(\vec{x},t)}, \tag{0.1}$$

где мы используем, что

$$\frac{\delta\dot{\phi}_k(\vec{x},t)}{\delta\dot{\phi}_i(\vec{y},t)} = \delta_{ik}\delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{0.2}$$

Далее, по опять же по аналогии с классической механикой, мы вводим скобку Пуассона

$$\{F(\phi_k(\vec{x},t),\pi_k(\vec{x},t)), G(\phi_k(\vec{y},t),\pi_k(\vec{y},t))\} = \int d^3z \sum_i \left(\frac{\delta F}{\delta\phi_i(\vec{z},t)}\frac{\delta G}{\delta\pi_i(\vec{z},t)} - \frac{\delta F}{\delta\pi_i(\vec{z},t)}\frac{\delta G}{\delta\phi_i(\vec{z},t)}\right) \tag{0.3}$$

и подразумеваем, что

$$\frac{\delta\phi_k(\vec{x},t)}{\delta\phi_i(\vec{y},t)} = \delta_{ik}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad \frac{\delta\pi_k(\vec{x},t)}{\delta\pi_i(\vec{y},t)} = \delta_{ik}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad \frac{\delta\phi_k(\vec{x},t)}{\delta\pi_i(\vec{y},t)} = \frac{\delta\pi_k(\vec{x},t)}{\delta\phi_i(\vec{y},t)} = 0. \tag{0.4}$$

Легко проверить, что

$$\{\phi_i(\vec{x},t),\phi_j(\vec{y},t)\} = \{\pi_i(\vec{x},t),\pi_j(\vec{y},t)\} = 0, \quad \{\phi_i(\vec{x},t),\pi_j(\vec{y},t)\} = \delta_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{0.5}$$

Общее утверждение заключается в том, что интегралы движения (заряды)

$$Q = \int d^3\vec{x} J^0(\vec{x},t), \quad \frac{dQ}{dt} = 0, \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{0.6}$$

генерируют симметрию (из которой они по теореме Нетер были вычисленны), а именно

$$\{\phi_i(\vec{x},t), Q\} = \delta\phi_i(\vec{x},t), \tag{0.7}$$

где инфинитезимальное преобразование симметрии есть $\phi_i'(x) = \phi_i(x) + \epsilon\delta\phi_i(x)$.

◯ **Упражнение 1.** Проверьте (0.7) для комплексного скалярного поля ($U(1)$ симметрия).
Решение 1. Как мы уже знаем $U(1)$ сохраняющийся ток

$$j^\mu = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) \tag{0.8}$$

соответствует симметрии $\phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x)$, что при инфинитезимальном α запишется как

$$\delta\phi = i\phi, \quad \delta\phi^* = -i\phi^* \tag{0.9}$$

С другой стороны сохраняющийся заряд равен

$$Q = i\int d^3\vec{x}(\pi\phi - \phi^*\pi^*). \tag{0.10}$$

Тогда находим,

$$\{\phi(\vec{x},t),Q\} = \int d^3z \left(\frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\phi(\vec{z},t)}\frac{\delta Q}{\delta\pi(\vec{z},t)} - \frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\pi(\vec{z},t)}\frac{\delta Q}{\delta\phi(\vec{z},t)} + \frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\phi^*(\vec{z},t)}\frac{\delta Q}{\delta\pi^*(\vec{z},t)} - \frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\pi^*(\vec{z},t)}\frac{\delta Q}{\delta\phi^*(\vec{z},t)}\right) =$$
$$= \int d^3z \left(\frac{\delta Q}{\delta\pi(\vec{z},t)}\frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\phi(\vec{z},t)}\right) = \int d^3z \left(\frac{\delta Q}{\delta\pi(\vec{z},t)}\delta(\vec{x}-\vec{z})\right) = \frac{\delta Q}{\delta\pi(\vec{x},t)} =$$
$$= \frac{\delta\big(i\int d^3\vec{y}(\pi(\vec{y},t)\phi(\vec{y},t)) - \phi^*(\vec{y},t)\pi^*(\vec{y},t))\big)}{\delta\pi(\vec{x},t)} = i\phi(\vec{x},t). \tag{0.11}$$

Аналогично найдем, что $\{\phi^*(\vec{x},t),Q\} = -i\phi^*(\vec{x},t)$. ○

○ **Упражнение 2.** Проверьте, на примере скалярного поля, что Гамильтониан генерирует сдвиги по времени: $\{\phi(\vec{x},t),H\} = \dot{\phi}(\vec{x},t)$
Решение 2. Для Гамильтониана имеем

$$H = \int d^3\vec{x}\big(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\big), \tag{0.12}$$

тогда

$$\{\phi(\vec{x},t),H\} = \int d^3z \left(\frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\phi(\vec{z},t)}\frac{\delta H}{\delta\pi(\vec{z},t)} - \frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\pi(\vec{z},t)}\frac{\delta H}{\delta\phi(\vec{z},t)}\right) = \frac{\delta H}{\delta\pi(\vec{x},t)} = \pi(\vec{x},t) = \dot{\phi}(\vec{x},t). \tag{0.13}$$

Откуда мы получили, что Гамильтониан генерирует сдвиги по времени. Это не удивительно, так как Гамилтониан это по сути заряд

$$H = \int d^3\vec{x}\, T^{00}(\vec{x},t), \tag{0.14}$$

получающийся из компоненты тензора энергии импульса $T^{\mu 0}$. ○

○ **Упражнение 3.** Проверьте, на примере скалярного поля, что импульс генерирует пространственные сдвиги: $\{\phi(\vec{x},t),\vec{P}\} = -\nabla\phi(\vec{x},t)$
Решение 3. Для импульса имеем

$$P^i = \int d^3x T^{0i} = -\int d^3\vec{x}\,\pi(\vec{x},t)\partial_i\phi(x,t), \tag{0.15}$$

тогда

$$\{\phi(\vec{x},t),\vec{P}\} = \int d^3z \left(\frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\phi(\vec{z},t)}\frac{\delta\vec{P}}{\delta\pi(\vec{z},t)} - \frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\pi(\vec{z},t)}\frac{\delta\vec{P}}{\delta\phi(\vec{z},t)}\right) = \frac{\delta\vec{P}}{\delta\pi(\vec{x},t)} = -\nabla\phi(\vec{x},t). \tag{0.16}$$

○

○ **Упражнение 4.** Проверьте, на примере скалярного поля, что момент импульса генерирует пространственные повороты: $\{\phi(\vec{x},t),L_k\} = -\epsilon_{ijk}x^i\partial_j\phi(\vec{x},t)$
Решение 4. Для момента импульса имеем (см. Листок 1)

$$L_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\int d^3\vec{x}(x^iT^{0j} - x^jT^{0i}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\int d^3\vec{x}\pi(\vec{x},t)(x^i\partial^j\phi(\vec{x},t) - x^j\partial^i\phi(\vec{x},t)) \tag{0.17}$$

тогда

$$\{\phi(\vec{x},t),L_k\} = \int d^3z \left(\frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\phi(\vec{z},t)}\frac{\delta L_k}{\delta\pi(\vec{z},t)} - \frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\pi(\vec{z},t)}\frac{\delta L_k}{\delta\phi(\vec{z},t)}\right) = \frac{\delta L_k}{\delta\pi(\vec{x},t)} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(x^i\partial^j - x^j\partial^i)\phi(\vec{x},t) =$$
$$= \epsilon_{ijk}x^i\partial^j\phi(\vec{x},t). \tag{0.18}$$

○