Обращение Мёбиуса

A3⅔◇1 (функция Мёбиуса). Функция Мёбиуса $\mu(n)$ сопоставляет числу $n \in \mathbb{N}$ нуль, если n делится на квадрат простого числа, и $(-1)^s$, где s — число всех натуральных простых делителей n, если n не делится на квадраты простых чисел; кроме того, $\mu(1) = 1$. Покажите, что

а) $\mu(n)$ является мультипликативным характером числа n б) $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 1 \\ 0 \text{ при } n > 1 \end{cases}$

A3⅔◇2 (обращение Мёбиуса). Пусть для функции $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ известно значение суммы $\sigma(n) = \sum\limits_{d|n} g(d)$. Покажите, что $g(n) = \sum\limits_{d|n} \sigma(d) \cdot \mu(n/d)$.

A3⅔◇3. Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ вычислите $\sum\limits_{d|m} \varphi(d)$, где φ — функция Эйлера.

A3⅔◇4 (круговые многочлены). Приведённый многочлен $\Phi_n \in \mathbb{C}[x]$, корни которого суть комплексные первообразные корни степени n из 1 и только они, называется n-тым *круговым многочленом*. Найдите $\deg \Phi_n$ и покажите, что **а)** $x^n - 1 = \prod\limits_{d|n} \Phi_d(x)$ **б)** $\Phi_n(x) = \prod\limits_{d|n} \left(x^{n/d} - 1\right)^{\mu(d)}$

в) $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ при нечётном n **г)** $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n\left(x^p\right)/\Phi_m(x)$ при простом $p \nmid m$, $p > 2$

д) для всех простых p $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \dots + x + 1$ и $\Phi_{p^k}(x) = \Phi_p\left(x^{p^{k-1}}\right)$

е) при простых $p_i \neq p_j$ $\Phi_{p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}}(x) = \Phi_{p_1 p_2 \cdots p_n}\left(x^{p_1^{k_1-1} \cdots p_n^{k_n-1}}\right)$ **ж)** $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.

A3⅔◇5. Используя подходящую модификацию обращения Мёбиуса, докажите, что число неприводимых многочленов степени n в $\mathbb{F}_p[x]$ равно $\frac{1}{n} \sum\limits_{d|n} p^d \mu(n/d)$.

A3⅔◇6. Обозначим через i_m число неприводимых приведённых многочленов степени m в $\mathbb{F}_p[x]$. Докажите в $\mathbb{Q}[[t]]$ равенство $(1 - pt)^{-1} = \prod\limits_{m \in \mathbb{N}} \left(1 - t^m\right)^{-i_m}$.

A3⅔◇7 (локально конечные чумы). Множество называется *частично упорядоченным* (или чумом) если на нём задано рефлексивное транзитивное *кососимметричное*[1] отношение $x \leqslant y$. чум называется *локально конечным*, если $\forall\, x, y$ *отрезок* $[x, y] \overset{\text{def}}{=} \{\, z \mid x \leqslant z \leqslant y \,\}$ конечен. Являются ли локально конечными чумами: **а)** $\mathbb{N}$ с отношением $n|m$ **б)** совокупность конечных подмножеств произвольного множества X с отношением $X \subseteq Y$

A3⅔◇8 (алгебра инцидентности чума). Для локально конечного чума $\mathfrak{P}$ обозначим через $\mathcal{A}(\mathfrak{P})$ множество всех функций $\varrho : \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \to \mathbb{C}$, обращающихся в нуль на всех парах (x, y), не находящихся в отношении $x \leqslant y$. Зададим в $\mathcal{A}(\mathfrak{P})$ сложение $\varrho_1 + \varrho_2 : (x, y) \mapsto \varrho_1(x, y) + \varrho_2(x, y)$ и умножение $\varrho_1 \star \varrho_2 : (x, y) \mapsto \sum\limits_{x \leqslant z \leqslant y} \varrho_1(x, z) \varrho_2(z, y)$. Покажите, что получилось (некоммутативное) кольцо с единицей, обратимые элементы которого суть такие функции ϱ, что $\forall\, x \in \mathfrak{P}$ $\varrho(x, x) \neq 0$.

A3⅔◇9 (обращение Мёбиуса в чуме). Докажите для функции μ, обратной к[2] $\zeta(x, y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \text{ при } x \leqslant y \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$ равенства[3] $\mu(x, y) = -\sum\limits_{x \leqslant z < y} \mu(x, z) = -\sum\limits_{x < z \leqslant y} \mu(z, y)$ и покажите, что любая функция $g : \mathfrak{P} \to \mathbb{C}$ восстанавливается по значениям своих сумм $\sigma(x) = \sum\limits_{y < x} g(y)$ по формуле $g(x) = \sum\limits_{y < x} \sigma(y) \mu(y, x)$.

A3⅔◇10. Найдите функции Мёбиуса для чумов из зад. A3⅔◇7. Во что превращается в этих случаях предыдущая формула обращения?

[1] т. е. из $x \leqslant y$ и $y \leqslant$ следует, что $x = y$

[2] эти две функции называются *функцией Мебиуса* и *ζ-функцией* чума $\mathfrak{P}$

[3] запись $x < y$ означает, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № $3\frac{2}{3}$ (необязательный)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
5			
6			
7а			
б			
8			
9			
10			