

§4. Рациональные функции и степенные ряды

В этом параграфе мы продолжаем обозначать через K произвольное коммутативное кольцо с единицей, а через \mathbb{k} — произвольное поле.

4.1. Кольца частных. Конструкция, изготавливающая поле \mathbb{Q} из кольца \mathbb{Z} как множество дробей с целым числителем и целым ненулевым знаменателем¹, имеет смысл в любом коммутативном кольце K с единицей.

Будем называть подмножество $S \subset K$ *мультипликативным*, если $1 \in S$, $0 \notin S$ и $st \in S$ для любых $s, t \in S$.

Например, если элемент $q \in K$ не является нильпотентным, то множество всех его целых неотрицательных степеней q^k мультипликативно².

Множество $K^\circ \subset K$, состоящее из всех ненулевых элементов, которые не являются делителями нуля, также мультипликативно. В частности, множество всех ненулевых элементов любого целостного кольца мультипликативно.

Свяжем с каждым мультипликативным подмножеством $S \subset K$ наименьшее отношение эквивалентности \sim_S на множестве упорядоченных пар $K \times S$, содержащее все эквивалентности вида $(a, t) \sim (as, ts)$ с произвольными $s \in S$. Будем называть полученные классы эквивалентности *дробями со знаменателями из S* и обозначать a/s . Множество всех дробей со знаменателями в S обозначим KS^{-1} или $K[S^{-1}]$ и назовём *кольцом частных (или локализацией)* кольца K со знаменателями в S .

Лемма 4.1

$a/r = b/t$ в $KS^{-1} \iff \exists s \in S : ats = brs$ в K .

Доказательство. Будем писать $(a, r) \approx (b, t)$, если $\exists s \in S : (at - br)s = 0$ в K . В этом случае двухшаговая цепочка элементарных отождествлений $(a, r) \sim (ats, rts) = (brs, rts) \sim (b, t)$ показывает, что отношение \approx содержится в отношении \sim_S . Остаётся убедиться, что \approx является отношением эквивалентности — тогда оно совпадёт с \sim_S в виду минимальности последнего. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Пусть $(a, r) \approx (b, t)$ и $(b, t) \approx (c, u)$, т. е. существуют такие $s_1, s_2 \in S$, что $ats_1 = brs_1$ и $bust_2 = cts_2$. Тогда $au(ts_1s_2) = brus_1s_2 = cr(ts_1s_2)$, т. е. $(a, r) \approx (c, u)$. \square

Лемма 4.2

Операции $\frac{a}{r} + \frac{b}{s} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{as+br}{rs}$ и $\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{s} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ab}{rs}$ корректно задают на KS^{-1} структуру коммутативного кольца с единицей $1/1$ и нулём $0/1$.

Доказательство. Поскольку всякое отношение \sim_S представляет собой одно- или двухшаговую цепочку элементарных отождествлений $(a, r) \sim (au, ru)$ достаточно проверить, что результаты операций не меняются при замене $\frac{a}{r}$ на $\frac{au}{ru}$, а $\frac{b}{s}$ — на $\frac{bw}{sw}$,:

$$\begin{aligned} \frac{au}{ru} + \frac{bw}{sw} &= \frac{ausw + bwr u}{rusw} = \frac{(as + br) \cdot wu}{rs \cdot wu} = \frac{as + br}{rs} \\ \frac{au}{ru} \cdot \frac{bw}{sw} &= \frac{aubw}{rusw} = \frac{(ab) \cdot wu}{rs \cdot wu} = \frac{ab}{rs}. \end{aligned}$$

¹см. прим. 1.5 на стр. 11 и прим. 2.2 на стр. 16

²мы по определению полагаем $q^0 = 1$

Проверку выполнения в KS^{-1} всех аксиом коммутативного кольца с единицей мы оставляем читателю в качестве упражнения. \square

Теорема 4.1

Отображение $\iota_S : K \rightarrow KS^{-1}$, переводящее $a \in K$ в дробь $a/1$, является гомоморфизмом колец, причём $\iota_S(s)$ обратим в KS^{-1} для любого $s \in S$, и $\ker \iota = \{a \in K \mid \exists s \in S : as = 0\}$. Для любого гомоморфизма $\varphi : K \rightarrow R$ в целостное кольцо R , такого что $\varphi(s)$ обратим в R для всех $s \in S$, существует единственный гомоморфизм колец $\varphi_S : KS^{-1} \rightarrow R$, такой что $\varphi = \varphi_S \circ \iota$.

Доказательство. Гомоморфность ι очевидна. Обратной к дроби $\iota(s) = s/1$ является дробь $1/s$. Дробь $\iota(a) = a/1$ равна $0/1$ тогда и только тогда, когда найдётся $s \in S$, такой что $a \cdot 1 \cdot s = 0 \cdot 1 \cdot s = 0$. Докажем последнее утверждение. Чтобы продолжить гомоморфизм $\varphi : K \rightarrow R$ до гомоморфизма $\varphi_S : KS^{-1} \rightarrow R$, у нас нет иного выбора как положить $\varphi_S(1/s) = 1/\varphi(s)$, поскольку должны выполняться равенства $\varphi_S(1/s) \cdot \varphi(s) = \varphi_S(s \cdot (1/s)) = \varphi_S(1) = 1$. Тем самым, продолжение обязано задаваться формулой $\varphi_S(a/r) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(a) \cdot \frac{1}{\varphi(r)}$. Остаётся проверить, что она корректна и задаёт гомоморфизм. Заменяя $\frac{a}{r}$ на $\frac{aS}{rS}$, получаем

$$\varphi_S\left(\frac{aS}{rS}\right) = \frac{\varphi(aS)}{\varphi(rS)} = \frac{\varphi(a)\varphi(s)}{\varphi(r)\varphi(s)} = \frac{\varphi(a)}{\varphi(r)}.$$

Аналогично проверяется, что φ_S перестановочен со сложением и умножением. \square

Замечание 4.1. Кольцо KS^{-1} и гомоморфизм $\iota_S : K \rightarrow KS^{-1}$ определяются последним свойством из теор. 4.1 однозначно с точностью до единственного изоморфизма в следующем точном смысле. Пусть гомоморфизм $l' : K \rightarrow F$ делает все элементы из S обратимыми в F и обладает универсальным свойством из теор. 4.1: для любого гомоморфизма $\varphi : K \rightarrow R$ в целостное кольцо R , делающего все элементы из S обратимыми в R , существует единственный гомоморфизм колец $\varphi'_S : F \rightarrow R$, такой что $\varphi = \varphi'_S \circ l'$. Тогда существует единственный изоморфизм $\psi : KS^{-1} \xrightarrow{\sim} F$, такой что $l' = \psi \circ \iota$.

Действительно, в силу универсальности гомоморфизма ι гомоморфизм l' единственным образом представляется в виде $l' = \psi \circ \iota$, а в силу универсальности гомоморфизма l' гомоморфизм ι точно так же единственным образом представляется в виде $\iota = \psi' \circ l'$. Композиция $\psi' \circ \psi$ доставляет разложение самого гомоморфизма ι в виде $\iota = \psi' \circ \psi \circ \iota$. Поскольку одновременно $\iota = \text{Id}_{KS^{-1}} \circ \iota$, из единственности такого представления вытекает, что $\psi' \circ \psi = \text{Id}_{KS^{-1}}$. По той же причине $\psi \circ \psi' = \text{Id}_F$. Таким образом, ψ' и ψ являются взаимно обратными изоморфизмами.

Замечание 4.2. Если в определении мультипликативной системы отбросить требование $0 \notin S$, то всё сказанное выше не утратит формального смысла: эквивалентность \sim_S и кольцо KS^{-1} будут по-прежнему определены, а лем. 4.1, лем. 4.2 и теор. 4.1 (как и их доказательства) останутся в силе. Однако, если $0 \in S$, кольцо KS^{-1} получится нулевым: все дроби a/s будут эквивалентны дроби $0/1 = 0$.

Упражнение 4.1. Убедитесь в этом.

4.1.1. Поле частных целостного кольца. Если кольцо K не имеет делителей нуля, его ненулевые элементы образуют мультипликативную систему. Кольцо частных со знаменателями в этой системе называется *полем частных* целостного кольца K и обозначается Q_K .

Упражнение 4.2. Проверьте, что это действительно поле.

Гомоморфизм $\iota : K \hookrightarrow Q_K$, переводящий $a \in K$ в $a/1 \in Q_K$ в этом случае инъективен, и для любого гомоморфизма $\varphi : K \rightarrow R$ в целостное кольцо R , переводящего все ненулевые элементы K в обратимые элементы R , единственным способом продолжается до инъективного гомоморфизма $\tilde{\varphi} : Q_K \hookrightarrow R$.

Пример 4.1 (поле \mathbb{Q})

Полем частных целостного кольца \mathbb{Z} является поле рациональных чисел $\mathbb{Q} = Q_{\mathbb{Z}}$, которое канонически вкладывается в любое поле характеристики нуль в качестве простого подполя (ср. с н° 2.8.1).

Пример 4.2 (поле рядов Лорана)

Поле частных целостного кольца формальных степенных рядов $\mathbb{k}[[x]]$ с коэффициентами в произвольном поле \mathbb{k} называется полем *рядов Лорана* и обозначается $\mathbb{k}((x)) = Q_{\mathbb{k}[[x]]}$. Название «ряд Лорана» объясняется тем, что каждый элемент $f \in \mathbb{k}((x))$ можно записать как формальный степенной ряд, в котором допускается конечное число отрицательных степеней переменной x

$$f(x) = \sum_{k \geq -m} a_k x^k = x^{-m} h(x), \quad \text{где } h \in \mathbb{k}[[x]]. \quad (4-1)$$

В самом деле, по определению поля частных $f(x) = p(x)/q(x)$, где $p, q \in \mathbb{k}[[x]]$ и $q \neq 0$. Если младший член ряда q имеет степень m , то $q = x^m \cdot g(x)$, где $g \in \mathbb{k}[[x]]$ имеет ненулевой свободный член и, стало быть обратим. Поэтому мы можем записать исходную дробь в виде $f(x) = x^{-m} h(x)$, где $h = p/g \in \mathbb{k}[[x]]$ является обычным степенным рядом.

4.2. Поле рациональных функций. Поле частных кольца многочленов $\mathbb{k}[x]$ обозначается через $\mathbb{k}(x)$ и называется *полем рациональных функций* от одной переменной. Элементы этого поля представляют собой формальные отношения многочленов $f(x) = p(x)/q(x)$ с коэффициентами в поле \mathbb{k} . Если $\text{nod}(p, q) = 1$, то запись $f = p/q$ называется *несократимым представлением* дроби f . Каждая дробь имеет несократимое представление, которое получается из произвольной записи $f = g/h$ делением числителя и знаменателя на $\text{nod}(g, h)$.

Упражнение 4.3. Покажите, что несократимая запись любой дроби единственна с точностью до умножения числителя и знаменателя на ненулевую константу (в частности, имеется ровно одно несократимое представление с приведённым знаменателем).

Предложение 4.1

Если знаменатель несократимой записи f/g является произведением попарно взаимно простых многочленов $g = g_1 g_2 \dots g_m$, то дробь f/g единственным образом представляется в виде суммы

$$\frac{f}{g} = h + \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \dots + \frac{f_m}{g_m}, \quad (4-2)$$

в которой $\deg h = \deg f - \deg g$ и $\deg f_i < \deg g_i$.

Доказательство. Поделим f на g с остатком: $f = hg + r$, где $\deg r < \deg g$. Тогда $f/g = h + r/g$. Если $g = g_1 g_2$ и $\text{нод}(g_1, g_2) = 1$, то существует единственный такой многочлен f_1 , что $\deg f_1 < \deg g_1$ и $[f_1]_{g_1} = [r]_{g_1} / [g_2]_{g_1}$ в кольце вычетов $\mathbb{k}[x]/(g)$. Тогда в $\mathbb{k}[x]$ мы имеем равенство $r = f_1 \cdot g_2 + f_2 \cdot g_1$ для некоторого многочлена f_2 , причём сравнение степеней левой и правой части показывает, что $\deg f_2 < \deg g_2$. Таким образом, $r/g = f_1/g_1 + f_2/g_2$ и с каждой из этих дробей можно снова проделать аналогичную процедуру. Это доказывает существование разложения. Для доказательства единственности рассмотрим произвольное разложение (4-2). Умножая обе его части на g , получаем в $\mathbb{k}[x]$ равенство

$$f = hg + f_1 Q_1 + f_2 Q_2 + \dots + f_m Q_m, \quad (4-3)$$

в котором $Q_i = \prod_{v \neq i} g_v$ и $\deg(\sum f_v Q_v) < \deg Q$. Отсюда мы заключаем, что многочлен h является неполным частным от деления f на g , многочлен $r = \sum f_v Q_v$ — остатком от этого деления, а каждый f_i есть единственный многочлен степени $< \deg g_i$, представляющий в кольце вычетов $\mathbb{k}[x]/(g_i)$ класс $r^{-1} \pmod{g_i} \equiv f Q_i^{-1} \pmod{g_i}$. Тем самым, все ингредиенты формулы (4-2) однозначно определяются многочленами f и g . \square

Предложение 4.2

Любую дробь вида f/g^m , в которой $\deg f < \deg(g^m) = m \deg g$, можно *единственным образом* представить в виде суммы

$$\frac{f}{g^m} = \frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{g^2} + \dots + \frac{f_m}{g^m}, \quad (4-4)$$

где каждый числитель f_i имеет степень $\deg f_i < \deg g$.

Доказательство. Представление (4-4) равносильно представлению многочлена f в виде

$$f = f_1 g^{m-1} + f_2 g^{m-2} + \dots + f_{m-1} g + f_m, \quad (4-5)$$

аналогичном представлению целого числа f в g -ичной позиционной системе исчисления: f_m равен остатку от деления на g самого многочлена f , f_{m-1} — остатку от деления на g частного $(f - f_m)/g$, f_{m-2} — остатку от деления на g частного $((f - f_m)/g - f_{m-1})/g$ и т. д. \square

4.2.1. Разложение на простейшие дроби. Из предыдущих двух лемм вытекает, что любая дробь $f/g \in \mathbb{k}(x)$ допускает *единственное* представление в виде суммы многочлена степени $\deg f - \deg g$ (неполного частного от деления f на g) и дробей вида p/q^m , где q пробегает множество неприводимых делителей знаменателя, m меняется от 1 до кратности вхождения неприводимого множителя q в разложение многочлена g на неприводимые множители, а каждый числитель p имеет степень $\deg p < \deg q$. Такое представление называется *разложением f/g на простейшие дроби* и часто оказывается полезным при вычислениях с рациональными функциями.

Пример 4.3

Вычислим первообразную¹ и 2013-ю производную от $1/(1+x^2)$. Для этого разложим эту дробь в сумму простейших в поле $\mathbb{C}(x)$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{\alpha}{1+ix} + \frac{\beta}{1-ix}, \quad \text{где } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

¹точное (и чисто алгебраическое) определение первообразной от степенного ряда (и в частности, от рациональной функции) см. в п° 4.4 на стр. 54

Подставляя $x = \pm i$ в равенство $1 = \alpha(1 - ix) + \beta(1 + ix)$, находим $\alpha = \beta = 1/2$, т. е.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix} \right).$$

Теперь уже легко вычислить как 2013-ю производную:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2013} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{2012!}{2} \left(\frac{(-i)^{2013}}{(1+ix)^{2014}} + \frac{i^{2013}}{(1-ix)^{2014}} \right) = \\ &= \frac{i}{2} \cdot 2012! \cdot \frac{(1+ix)^{2014} - (1-ix)^{2014}}{(1+x^2)^{2014}} = 2012! \cdot \sum_{\nu=0}^{1006} \binom{2014}{2\nu+1} \cdot \frac{x^{2\nu+1}}{(1+x^2)^{2014}}, \end{aligned}$$

так и первообразную:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+ix} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-ix} = \frac{1}{2} (\ln(1+ix) + \ln(1-ix)) = \ln \sqrt{1+x^2}.$$

Написанные равенства суть равенства в кольце $\mathbb{C}[[x]]$, и их точный смысл мы ещё обсудим ниже.

4.3. Разложение рациональных функций в степенные ряды. В силу универсального свойства поля частных, поле рациональных функций $\mathbb{k}(x)$ единственным образом вкладывается в поле рядов Лорана $\mathbb{k}((x))$ так, что при этом многочлены переходят в многочлены. С практической точки зрения это вложение представляет собою разложение рациональных функций f/g в формальные степенные ряды. Если основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, такое разложение можно описать довольно явными формулами.

А именно, пусть $\deg f < \deg g$ и знаменатель дроби f/g имеет вид:

$$g(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \prod (1 - \alpha_i x)^{m_i}, \quad (4-6)$$

где все числа $\alpha_i \in \mathbb{k}$ попарно различны.

Упражнение 4.4. Убедитесь, что при $a_n \neq 0$ числа α_i из разложения (4-6) суть корни многочлена $t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n = \prod (t - \alpha_i)^{m_i}$.

Тогда по предл. 4.1 и предл. 4.2 функция f/g является суммой простейших дробей вида

$$\frac{\beta_{ij}}{(1 - \alpha_i x)^{k_{ij}}} \quad (4-7)$$

где при каждом i показатели k_{ij} лежат в пределах $1 \leq k_{ij} \leq m_i$, а $\beta_{ij} \in \mathbb{k}$. Если все кратности $m_i = 1$, константы β_i в получающемся разложении

$$\frac{f(x)}{(1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x) \dots (1 - \alpha_n x)} = \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1 x} + \frac{\beta_2}{1 - \alpha_2 x} + \dots + \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n x} \quad (4-8)$$

легко указать явно: умножая обе части (4-8) на знаменатель и беря $x = \alpha_i^{-1}$, получаем

$$\beta_i = \frac{f(\alpha_i^{-1})}{\prod_{\nu \neq i} (1 - (\alpha_\nu / \alpha_i))} = \frac{\alpha_i^{n-1} f(\alpha_i^{-1})}{\prod_{\nu \neq i} (\alpha_i - \alpha_\nu)}. \quad (4-9)$$

Дробь f/g в этом случае равна сумме геометрических прогрессий (4-8)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum (\beta_1 \alpha_1^k + \beta_2 \alpha_2^k + \dots + \beta_n \alpha_n^k) \cdot x^k.$$

Для произвольной кратности $m_i = m \in \mathbb{N}$ простейшая дробь (4-7) раскладывается в ряд по формуле Ньютона для бинома с отрицательным показателем

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k \geq 0} \frac{(k+m-1)(k+m-2) \dots (k+1)}{(m-1)!} \cdot x^k = \sum_{k \geq 0} \binom{k+m-1}{m-1} \cdot x^k, \quad (4-10)$$

которая получается $(m-1)$ -кратным дифференцированием обеих частей разложения геометрической прогрессии $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

Упражнение 4.5. Убедитесь, что $\left(\frac{d}{dx}\right)^m (1-x)^{-1} = m!/(1-x)^{m+1}$.

Таким образом, разложение простейшей дроби (4-7) имеет вид

$$\frac{\beta}{(1-\alpha_i x)^m} = \beta \sum_{k \geq 0} \alpha_i^k \binom{k+m-1}{m-1} \cdot x^k, \quad (4-11)$$

4.3.1. Решение линейных рекуррентных уравнений. Предыдущие вычисления можно использовать для отыскания «формулы k -того члена» последовательности z_k , заданной линейным рекуррентным уравнением n -того порядка:

$$z_k + a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2} + \dots + a_n z_{k-n} = 0, \quad (4-12)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ — некоторые фиксированные заданные числа.

В самом деле, уравнению (4-12) при $k \geq n$ удовлетворяют коэффициенты z_k степенного ряда

$$\frac{b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n} = z_0 + z_1 x + z_2 x^2 + \dots$$

Если подобрать $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ в числителе левой части так, чтобы первые n коэффициентов справа совпадали с начальным куском последовательности (4-12), и разложить полученную рациональную функцию в ряд, то мы получим явные выражения элементов последовательности z_k через k .

Пример 4.4 (числа Фиббоначчи)

Найдём явное выражение через k для элементов последовательности

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_k = z_{k-1} + z_{k-2} \quad \text{при } k \geq 2,$$

решающей рекуррентное уравнение $z_k - z_{k-1} - z_{k-2} = 0$ на коэффициенты ряда

$$\frac{b_0 + b_1 x}{1 - x - x^2} = x + z_2 x^2 + z_3 x^3 + \dots \quad (4-13)$$

(мы подставили в правую часть данные по условию $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$). Умножая обе части (4-13) на общий знаменатель и сравнивая коэффициенты при x^0 и x^1 , получаем $b_0 = 0$ и $b_1 = 1$. Итак, нас интересуют коэффициенты ряда

$$z(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{\beta_+}{1 - \alpha_+ x} + \frac{\beta_-}{1 - \alpha_- x},$$

где $\alpha_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ суть корни многочлена $t^2 - t - 1$, а числа β_{\pm} находятся по формуле (4-9) с учётом равенств $\alpha_+ \alpha_- = -1$, $\alpha_+ + \alpha_- = 1$ и $\alpha_+ - \alpha_- = \sqrt{5}$: $\beta_+ = -\beta_- = 1/(\alpha_+ - \alpha_-) = 1/\sqrt{5}$. Получаем:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\alpha_+x} - \frac{1}{1-\alpha_-x} \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_+^k - \alpha_-^k}{\sqrt{5}} \cdot x^k,$$

откуда

$$z_k = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \sqrt{5}}.$$

Предложение 4.3

Всякая последовательность z_k , удовлетворяющая при $k \geq n$ линейному рекуррентному уравнению n -того порядка

$$z_k + a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2} + \dots + a_n z_{k-n} = 0, \quad (4-14)$$

с постоянными коэффициентами $a_i \in \mathbb{C}$, имеет вид

$$z_k = \alpha_1^k \cdot \varphi_1(k) + \alpha_2^k \cdot \varphi_2(k) + \dots + \alpha_r^k \cdot \varphi_r(k),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ суть все различные корни многочлена¹

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n, \quad (4-15)$$

а каждая из функций $\varphi_i \in \mathbb{C}[x]$ представляет собою многочлен степени на единицу меньше, чем кратность соответствующего корня α_i .

Доказательство. Ряд $\sum z_k x^k \in \mathbb{C}[[x]]$, коэффициенты которого решают уравнение (4-14), является суммой дробей вида $\beta \cdot (1 - \alpha x)^{-m}$, где α пробегает различные корни многочлена (4-15), показатель степени m может принимать любое значение от 1 до кратности соответствующего корня α , а $\beta = \beta(\alpha, m)$ — комплексное число, однозначно вычисляемое по α , m и первым n коэффициентам последовательности z_k . Согласно формуле (4-11) k -тый член разложения такой дроби имеет вид $\alpha^k \varphi(k)$, где $\varphi(k) = \binom{k+m-1}{m-1}$ есть многочлен от k степени $m-1$. \square

4.4. Логарифм и экспонента. Всюду в этом разделе мы рассматриваем ряды с коэффициентами в поле \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} = 0$. В этом случае из формулы (3-6) для производной вытекает, что для любого ряда $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ существует единственный ряд без свободного члена, производная от которого равна $f(x)$. Этот ряд называется *первообразным рядом* или *интегралом* от f и обозначается

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots = \sum_{k \geq 1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k. \quad (4-16)$$

¹он называется *характеристическим многочленом* рекуррентного уравнения (4-12)

Определение 4.1

Первообразный ряд от знакпеременной геометрической прогрессии называется *логарифмом* и обозначается

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dx}{1+x} = \int (1-x+x^2-x^3+\dots) dx = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k. \end{aligned} \quad (4-17)$$

4.4.1. Логарифмирование рядов. Вместо $1+x$ в логарифм можно подставить любой ряд $u(x)$ с единичным свободным членом — это равносильно подстановке вместо x ряда $u(x) - 1$ без свободного члена, что является алгебраической операцией. Обозначим через $N \subset \mathbb{K}[[x]]$ аддитивную абелеву группу всех рядов без свободного члена, а через $U \subset \mathbb{K}[[x]]$ — мультипликативную абелеву группу всех рядов с единичным свободным членом. Тогда операция *логарифмирования*, переводящая ряд $u(x) \in U$ в ряд $\ln(u(x)) \in N$, является алгебраической и задаёт отображение

$$\ln : U \rightarrow N, \quad u \mapsto \ln u. \quad (4-18)$$

Упражнение 4.6 (логарифмическая производная). Докажите для любого ряда $u \in U$ формулу $\frac{d}{dx} \ln u = u'/u$.

Лемма 4.3

Для рядов $u, w \in U$ равенства $u = w$, $u' = w'$, $\ln(u) = \ln(w)$ и $u'/u = w'/w$ попарно эквивалентны друг другу.

Доказательство. Первое равенство влечёт за собой все остальные. Поскольку ряды с равными свободными членами совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их производные, первые два равенства и последние два равенства равносильны друг другу. Остаётся показать, что из последнего равенства следует первое. Но последнее равенство утверждает, что $u'/u - w'/w = (u'w - w'u)/uw = (w/u) \cdot (u/w)' = 0$, откуда $(u/w)' = 0$, т. е. $u/w = \text{const} = 1$. \square

Упражнение 4.7. Покажите, что $\forall u \in U \quad \ln(1/u) = -\ln u$.

Определение 4.2

Ряд $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\dots$ называется *экспонентой*. Это единственный ряд в U , удовлетворяющий дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$.

4.4.2. Экспоненцирование рядов. Подставляя в экспоненту вместо x любой ряд $\tau(x)$ без свободного члена, мы получаем ряд $e^{\tau(x)}$ со свободным членом 1, который называется *экспонентой* ряда $\tau(x)$. Этим определяется экспоненциальное отображение

$$\exp : N \rightarrow U, \quad \tau \mapsto e^\tau. \quad (4-19)$$

Теорема 4.2

Экспоненциальное и логарифмическое отображения (4-19) и (4-18) являются взаимно обратными изоморфизмами абелевых групп. В частности, для любых рядов $u, u_1, u_2 \in U$ и $\tau, \tau_1, \tau_2 \in N$ выполняются тождества:

$$\ln e^\tau = \tau, \quad e^{\ln u} = u, \quad \ln(u_1 u_2) = \ln(u_1) + \ln(u_2), \quad e^{\tau_1 + \tau_2} = e^{\tau_1} e^{\tau_2}.$$

Доказательство. Равенство $\ln e^\tau = \tau$ проверяется взятием производной, а равенство $e^{\ln u} = u$ — взятием логарифмической производной от обеих частей. Тем самым, экспоненцирование и логарифмирование — взаимно обратные биекции. Ряды $\ln(u_1 u_2)$ и $\ln u_1 + \ln u_2$ совпадают, поскольку имеют нулевые свободные члены и равные производные:

$$(\ln(u_1 u_2))' = \frac{(u_1 u_2)'}{u_1 u_2} = \frac{u_1' u_2 + u_1 u_2'}{u_1 u_2} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} = (\ln u_1 + \ln u_2)'$$

Таким образом, логарифмирование — гомоморфизм. Поэтому и обратное к нему отображение гомоморфизм. \square

Упражнение 4.8. Докажите в $\mathbb{k}[[x, y]]$ равенство $e^{x+y} = e^x e^y$ непосредственным сравнением коэффициентов этих двух рядов.

4.5. Степенная функция и бином Ньютона. В этом разделе мы продолжаем считать, что $\text{char } \mathbb{k} = 0$. Для любого числа $\alpha \in \mathbb{k}$ определим *биномиальный ряд* с показателем α формулой

$$(1+x)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln(1+x)}.$$

Подставляя вместо $1+x$ произвольные ряды $u \in U$, мы для любого числа $\alpha \in \mathbb{k}$ получаем алгебраическую операцию $U \rightarrow U$ *возведения в α -тую степень* $u \mapsto u^\alpha$, обладающую всеми интуитивно ожидаемыми от степенной функции свойствами: для любых рядов $u, v \in U$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ выполняются равенства

$$u^\alpha \cdot u^\beta = e^{\alpha \ln u} \cdot e^{\beta \ln u} = e^{\alpha \ln u + \beta \ln u} = e^{(\alpha+\beta) \ln u} = u^{\alpha+\beta} \quad (4-20)$$

$$(u^\alpha)^\beta = e^{\beta \ln(u^\alpha)} = e^{\beta \ln(e^{\alpha \ln u})} = e^{\alpha \beta \ln u} = u^{\alpha \beta} \quad (4-21)$$

$$(uv)^\alpha = e^{\alpha \ln(uv)} = e^{\alpha(\ln u + \ln v)} = e^{\alpha \ln u + \alpha \ln v} = e^{\alpha \ln u} \cdot e^{\alpha \ln v} = u^\alpha v^\alpha \quad (4-22)$$

В частности, для любого ряда u с единичным свободным членом $u^{1/n} = \sqrt[n]{u}$ в том смысле, что $(u^{1/n})^n = u$. Для явного отыскания коэффициентов a_i биномиального ряда

$$(1+x)^\alpha = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

вычислим его логарифмическую производную:

$$\frac{((1+x)^\alpha)'}{(1+x)^\alpha} = (\ln(1+x)^\alpha)' = (\alpha \ln(1+x))' = \frac{\alpha}{1+x}.$$

Приводя левую и правую часть к общему знаменателю, получаем соотношение

$$(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots) \cdot (1+x) = \alpha \cdot (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots).$$

Сравнивая коэффициенты при x^{k-1} в правой и левой части, приходим к рекуррентному соотношению $ka_k + (k-1)a_{k-1} = \alpha a_{k-1}$, из которого

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\alpha - (k-1)}{k} \cdot a_{k-1} = \frac{(\alpha - (k-1))(\alpha - (k-2))}{k(k-1)} \cdot a_{k-2} = \dots \\ &\dots = \frac{(\alpha - (k-1))(\alpha - (k-2)) \dots (\alpha - 1)\alpha}{k!}. \end{aligned}$$

Стоящая в правой части дробь имеет в числителе и знаменателе по k множителей, представляющих собою последовательно уменьшающиеся на единицу числа: в знаменателе — от k до 1, в числителе — от α до $(\alpha - k + 1)$. Эта дробь называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается

$$\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!} \quad (4-23)$$

Нами доказано

Предложение 4.4 (формула Ньютона)

Для любого числа $\alpha \in \mathbb{K}$ имеется разложение

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{6} x^3 + \dots$$

Пример 4.5 (бином с рациональным показателем)

При натуральном значении показателя $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеется лишь конечное число ненулевых биномиальных коэффициентов, поскольку при $k > n$ в числителе (4-23) образуется нулевой сомножитель. Поэтому разложение бинома в этом случае конечно:

$$(1 + x)^n = 1 + n x + \frac{n(n - 1)}{2} x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k.$$

При целом отрицательном $\alpha = -m$, $m \in \mathbb{N}$, мы снова получаем разложение (4-10) со стр. 53

$$(1 + x)^{-m} = 1 - m x + \frac{m(m + 1)}{2} x^2 - \frac{m(m + 1)(m + 2)}{6} x^3 + \dots = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{k + m - 1}{k} \cdot x^k.$$

При $\alpha = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, формула Ньютона разворачивает в степенной ряд радикал

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1 + x} &= 1 + \frac{1}{n} x + \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right)}{2} x^2 + \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \left(\frac{1}{n} - 2\right)}{6} x^3 + \dots = \\ &= 1 + \frac{x}{n} - \frac{n - 1}{2} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \frac{(n - 1)(2n - 1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{n^3} - \frac{(n - 1)(2n - 1)(3n - 1)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{x^4}{n^4} + \dots \end{aligned}$$

Например, при $n = 2$ в качестве коэффициента при x^k мы получаем дробь вида

$$\begin{aligned} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} &= \frac{(-1)^{k-1}}{2k - 1} \cdot \frac{(2k)!}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k))^2} = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{(2k - 1) \cdot 4^k} \cdot \binom{2k}{k}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sqrt{1 + x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k-1}}{2k - 1} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \frac{x^k}{4^k}. \quad (4-24)$$

Пример 4.6 (числа Каталана)

Воспользуемся разложением (4-24) для получения явной формулы для чисел Каталана, часто возникающих в различных комбинаторных задачах. Пусть при вычислении произведения $(n + 1)$ сомножителей

$$a_0 a_1 a_2 \cdots a_n \quad (\text{всего } n \text{ умножений}) \quad (4-25)$$

в каждый момент времени разрешается делать не более одного умножения. Если на каждом шагу заключать вычисленное произведение в скобки, мы расставим в выражении (4-25) n пар скобок $()$. Количество всех различных расстановок скобок, возникающих таким образом, называется n -ым числом Каталана c_n . При $n = 1, 2, 3$ все возможные расстановки скобок таковы:

$$\begin{aligned} &(a_1 a_2) \\ &(a_1(a_2 a_3)), ((a_1 a_2)a_3) \\ &(a_1(a_2(a_3 a_4))), (a_1((a_2 a_3)a_4)), ((a_1 a_2)(a_3 a_4)), ((a_1(a_2 a_3)a_4)), (((a_1 a_2)a_3)a_4). \end{aligned}$$

Тем самым, $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 5$. Множество всех возможных расстановок скобок в (4-25) распадается в дизъюнктное объединение n подмножеств, в которых конфигурация наружных скобок имеет вид

$$(a_0(a_2 \dots a_n)), ((a_0 a_1)(a_2 \dots a_n)), \dots, ((a_0 \dots a_{n-2})(a_{n-1} a_n)), ((a_0 \dots a_{n-1})a_n).$$

и которые состоят, соответственно, из $c_{n-1}, c_1 c_{n-2}, \dots, c_{n-2} c_1, c_{n-1}$ элементов. Если добавить к числам Каталана число $c_0 = 1$, то мы получим рекурсивное соотношение $c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \dots + c_{n-2} c_1 + c_{n-1} c_0$ на коэффициенты c_n ряда Каталана

$$c(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \in \mathbb{Z}[[x]],$$

означающее, что $c(x)^2 = (c(x) - 1)/x$. Иначе говоря, $t = c(x)$ является решением квадратного уравнения

$$x \cdot t^2 - t - 1 = 0$$

на неизвестную t в кольце $\mathbb{Z}[[x]]$. В поле $\mathbb{Q}((x)) \supset \mathbb{Z}[[x]]$ это уравнение решается по обычной школьной формуле, дающей два корня $(1 \pm \sqrt{1 - 4x})/(2x)$. Согласно (4-24),

$$\sqrt{1 - 4x} = - \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k + 1} \cdot \binom{2k}{k} \cdot x^k = 1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - 10x^4 - 28x^5 - \dots$$

Корень $(1 + \sqrt{1 - 4x})/(2x)$ не лежит в $\mathbb{Z}[[x]]$, поскольку ряд $1 + \sqrt{1 - 4x}$ имеет ненулевой свободный член и не делится на $2x$ в $\mathbb{Z}[[x]]$. Поэтому $c(x) = (1 - \sqrt{1 - 4x})/(2x)$ и

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k + 1} \cdot \binom{2k + 2}{k + 1} = \frac{1}{k + 1} \cdot \binom{2k}{k}.$$

Отметим, что с первого взгляда не вполне очевидно, что это число — целое.

4.6. Ряд Тодда и числа Бернулли. Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[[x]]$ от переменной x и кольцо многочленов $\mathbb{Q}[t]$ от переменной t . Обозначим через

$$D = \frac{d}{dt} : \mathbb{Q}[t] \xrightarrow{g \mapsto g'} \mathbb{Q}[t]$$

оператор дифференцирования, и для каждого степенного ряда $\Phi(x) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k x^k \in \mathbb{Q}[[x]]$ определим результат подстановки в Φ вместо x оператора D как отображение

$$\Phi(D) : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t], \quad f \mapsto \varphi_0 \cdot f + \varphi_1 \cdot f' + \varphi_2 \cdot f'' + \dots = \sum_{k \geq 0} \varphi_k \cdot D^k(f). \quad (4-26)$$

Поскольку каждое дифференцирование уменьшает степень многочлена на единицу, все слагаемые в правой части (4-26) обратятся в нуль при $k > \deg f$. Таким образом, для каждого многочлена $f \in \mathbb{Q}[t]$, правая часть (4-26) является корректно определённым многочленом, каждый коэффициент которого вычисляется конечным числом арифметических операций над коэффициентами исходного многочлена f и первыми $\deg(f)$ коэффициентами ряда Φ . Отображение

$$\text{ev}_D : \mathbb{Q}[[x]] \rightarrow \text{End}(\mathbb{Q}[t]), \quad \Phi(x) \mapsto \Phi(D), \quad (4-27)$$

является гомоморфизмом коммутативного кольца $\mathbb{Q}[[x]]$ в (некоммутативную) алгебру линейных эндоморфизмов пространства многочленов в том смысле, что все отображения $\Phi(D)$ линейны:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \forall f, g \in \mathbb{Q}[t] \quad \Phi(D)(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \Phi(D)f + \beta \cdot \Phi(D)g \quad (4-28)$$

и суммы и произведения рядов переходят в суммы и композиции соответствующих отображений. Последнее означает, что при подстановке D в произведение $\Phi(x)\Psi(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ получится композиция отображений $\Phi(D) \circ \Psi(D) = \Psi(D) \circ \Phi(D)$. В частности, все отображения $\Phi(D)$ перестановочны друг с другом, и отображение $\Phi(D)$ биективно тогда и только тогда, когда степенной ряд $\Phi(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ имеет ненулевой свободный член.

Упражнение 4.9. Проверьте все эти утверждения.

В силу линейности (4-28) для вычисления значения отображения

$$\Phi(D) = \varphi_0 + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2 + \dots : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t]$$

на произвольном многочлене достаточно уметь вычислять его на всех одночленах t^m :

$$\Phi(D)(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = a_0 + a_1 \Phi(D)t + a_2 \Phi(D)t^2 + \dots + a_n \Phi(D)t^n.$$

Для каждого k многочлен $\Phi_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(D)t^k \in \mathbb{Q}[t]$ имеет степень $\leq k$ и зависит лишь от первых $k+1$ коэффициентов ряда Φ . Он называется k -тым многочленом Аппеля ряда Φ .

Пример 4.7 (операторы сдвига)

Экспонента $e^D = 1 + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \dots$ имеет многочлены Аппеля

$$e^D t^m = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D^k t^m = \sum_{k \geq 0} \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{k!} t^{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} t^{m-k} = (t+1)^m.$$

Следовательно, оператор e^D действует на любой многочлен как *оператор сдвига*:

$$e^D : f(t) \mapsto f(t + 1).$$

Так как ряды e^x и e^{-x} обратны друг другу в $\mathbb{Q}[[x]]$, операторы e^D и e^{-D} тоже обратны друг другу, т. е.

$$e^{-D} : f(t) = f(t - 1).$$

Упражнение 4.10. Убедитесь, что $e^{\alpha D} f(t) = f(t + \alpha)$ при любом $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Пример 4.8 (вычисление степенных сумм)

Для произвольно зафиксированного $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ рассмотрим сумму

$$S_m(n) \stackrel{\text{def}}{=} 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \sum_{k=0}^n k^m \quad (4-29)$$

как функцию от n . Например:

$$S_0(n) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ раз}} = n$$

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = n^2(n + 1)^2/4 = S_1(n)^2.$$

Применяя к функции $S_m : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}$ оператор ∇ , переводящий функцию $\varphi(t)$ в функцию

$$\nabla\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t) - \varphi(t - 1),$$

мы получим многочлен $\nabla S_m(t) = t^m$. Покажем, что в $\mathbb{Q}[t]$ существует единственный многочлен $S_m(t)$ с нулевым свободным членом, такой что $\nabla S_m(t) = t^m$. Отметим, что его значения при целых неотрицательных $t = 0, 1, 2, \dots$ автоматически оказываются при этом равными суммам (4-29).

Из [прим. 4.7](#) видно, что на множестве многочленов $\mathbb{Q}[t]$ разностный оператор

$$\nabla = 1 - e^{-D}$$

получается подстановкой $x = D$ в ряд $1 - e^{-x} = \frac{1 - e^{-x}}{x} \cdot x$. Ряд $(1 - e^{-x})/x$ имеет единичный свободный член и, стало быть, обратим в $\mathbb{Q}[[x]]$. Обратный к нему ряд

$$\text{td}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{1 - e^{-x}} \in \mathbb{Q}[[x]]$$

называется *рядом Тодда*. Из равенства $\text{td}(x) \cdot (1 - e^{-x}) = x$ вытекает соотношение $\text{td}(D) \cdot \nabla = D$. Поэтому производная

$$S'_m(t) = DS_m(t) = \text{td}(D)\nabla S_m(t) = \text{td}(D)t^m$$

является многочленом Аппеля ряда Тодда. Искомый многочлен $S_m(t)$ является его первообразной. Для её вычисления удобно представить ряд Тодда в «экспоненциальной форме», вынеся из коэффициентов обратные факториалы:

$$\text{td}(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} x^k. \quad (4-30)$$

Итак, сумма m -тых степеней первых t натуральных чисел равна

$$\begin{aligned} S_m(t) &= \int \left(\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{k!} D^k t^m \right) dt = \int \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a_k t^{m-k} \right) dt = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{a_k t^{m-k+1}}{m-k+1} = \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\binom{m+1}{1} a_m t + \binom{m+1}{2} a_{m-1} t^2 + \dots + \binom{m+1}{m} a_1 t^m + \binom{m+1}{m+1} a_0 t^{m+1} \right). \end{aligned}$$

Эту формулу иногда представляют в символическом виде

$$(m+1) \cdot S_m(t) = (a \downarrow + t)^{m+1} - a_{m+1},$$

где стрелка у $a \downarrow$ предписывает заменять a^k на a_k при раскрытии бинома $(a+t)^{m+1}$. Коэффициенты a_k ряда Тодда находятся из соотношения $\text{td}(x) \cdot (1 - e^{-x})/x = 1$:

$$\left(1 + a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{a_3}{6} x^3 + \frac{a_4}{24} x^4 + \dots \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{24} x^3 + \frac{1}{120} x^4 - \dots \right) = 1.$$

Упражнение 4.11. Найдите первую дюжину чисел a_k , напишите явные формулы для $S_4(n)$ и $S_5(n)$ и вычислите¹ $S_{10}(1000)$.

4.6.1. Числа Бернулли. Название «ряд Тодда» вошло в обиход во второй половине XX века после работ Хирцебруха и Гротендика, где он был применён для формулировки и доказательства теоремы Риана – Роха. Во времена Бернулли и Эйлера предпочитали пользоваться рядом

$$\text{td}(-x) = \frac{x}{e^x - 1},$$

который отличается от ряда $\text{td}(x)$ ровно одним коэффициентом – имеет $-x/2$ вместо $x/2$:

$$\text{td}(x) - \text{td}(-x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} + \frac{x}{1 - e^x} = x \cdot \frac{2 - e^x - e^{-x}}{(1 - e^{-x}) \cdot (1 - e^x)} = x.$$

Это же вычисление показывает, что $x/2$ это *единственный* ненулевой член нечётной степени в ряде Тодда. Коэффициенты B_k в «экспоненциальной» записи ряда

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} x^k$$

¹Яков Бернулли (1654–1705) при помощи одних лишь пера и бумаги просуммировал десятые степени первой тысячи натуральных чисел примерно за 7 минут, о чём не без гордости написал в своём манускрипте «Ars Conjectandi», опубликованном в 1713 году уже после его кончины

называются *числами Бернулли*. Таким образом, $B_k = a_k$ при $k \neq 1$ и обращаются в нуль при всех нечётных $k \geq 3$, а $B_1 = -a_1 = -1/2$. Со времён своего открытия Яковом Бернулли, числа B_k вызывают неослабевающий интерес. Им посвящена обширная литература¹ и даже специальный интернет-ресурс <http://www.bernoulli.org/>, на котором, среди прочего, имеется программа для быстрого вычисления чисел B_k в виде несократимых рациональных дробей. Однако, не смотря на огромное количество красивых теорем о числах Бернулли, никакой внятной формулы, явно выражающей B_n через n нет, и любой содержательный новый взгляд в этом направлении явился бы ярким достижением.

Упражнение 4.12. Получите для чисел Бернулли рекурсивную формулу

$$(n+1)B_n = - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k.$$

4.6.2. Разностные операторы на пространстве многочленов. Для каждого формального степенного ряда $\Phi(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \dots \in \mathbb{Q}[[x]]$ можно, как и выше, определить оператор

$$\Phi(\nabla) : \mathbb{k}[t] \rightarrow \mathbb{k}[t], \quad f(x) \mapsto \sum_{v \geq 0} \varphi_v \nabla^v f. \quad (4-31)$$

Упражнение 4.13. Проверьте, что $\forall f \in \mathbb{Q}[t] \quad \deg(\nabla f) < \deg(f)$ (так что правая часть (4-31) является корректно определённым многочленом) и представьте оператор дифференцирования $D = d/dx$ в виде ряда (4-31) без свободного члена.

Предложение 4.5

Следующие условия на линейный оператор $F : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ попарно эквивалентны:

- 1) $F \circ \nabla = \nabla \circ F$
- 2) $F \circ T = T \circ F$, где $T : f(x) \mapsto f(x-1)$
- 3) $\forall \alpha \in \mathbb{Q} \quad F \circ T_\alpha = T_\alpha \circ F$, где $T_\alpha : f(x) \mapsto f(x-\alpha)$
- 4) $F = \Phi(D)$ для некоторого $\Phi \in \mathbb{Q}[[x]]$
- 5) $F = \Psi(\nabla)$ для некоторого $\Psi \in \mathbb{Q}[[x]]$.

Определение 4.3

Оператор $F : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$, удовлетворяющий условиям предл. 4.5, называется *разностным оператором* на пространстве многочленов.

Доказательство предл. 4.5. Импликации (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1). Покажем, что (1) \Rightarrow (5). Рассмотрим многочлены

$$\gamma_0 \equiv 1 \quad \text{и} \quad \gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \binom{x+k}{k} = \frac{1}{k!} (x+1)(x+2) \dots (x+k) \quad (\text{при } k > 0). \quad (4-32)$$

¹начать знакомство с которой я советую с гл. 15 книги К. Айрлэнд, М. Роузен. «Классическое введение в современную теорию чисел» и § 8 гл. V книги З. И. Борович, И. Р. Шафаревич. «Теория чисел»

Упражнение 4.14. Проверьте, что $\forall k \geq 1 \nabla \gamma_k = \gamma_{k-1}$ и что любой многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ однозначно записывается в виде $f = \sum_k c_k \gamma_k$ с $c_k \in \mathbb{Q}$, причём константы $c_k = \nabla^k f(-1)$.

Пусть значение многочлена $F(\gamma_k)$ при $x = -1$ равно a_k . По упр. 4.14

$$F(\gamma_k) = \sum_{v \geq 0} \lambda_v \gamma_v,$$

где $\lambda_v = \nabla^v F \gamma_k(-1) = F \nabla^v \gamma_k(-1) = F \gamma_{k-v}(-1) = a_{k-v}$. Мы заключаем, что $a_v = 0$ при $v > k$ и $F(\gamma_k) = \sum_{v=0}^k a_{k-v} \gamma_v = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha \nabla^\alpha \gamma_k$. Таким образом, F действует на многочлены γ_k точно также, как оператор $\sum_\alpha a_\alpha \nabla^\alpha$. Поэтому $F = \sum_\alpha a_\alpha \nabla^\alpha$. \square

4.7. Дробно степенные ряды. Ряд Лорана от переменной $x^{1/q}$

$$\sum_{k \geq m} a_k x^{k/q}, \quad a_k \in \mathbb{k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

называется *дробно-степенным рядом* или *рядом Пюизо*. Иначе можно сказать, что ряд Пюизо — это степенной ряд с ограниченными снизу рациональными показателями степеней, имеющими общий знаменатель. Также как и ряды Лорана, дробно-степенные ряды с коэффициентами в поле \mathbb{k} образуют поле. Основным результатом этого раздела является

Теорема 4.3

Если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль, то поле рядов Пюизо тоже алгебраически замкнуто.

Лемма 4.4 (лемма Гензеля)

Пусть $G(t, x) \in \mathbb{k}[[t]][x]$ является приведённым многочленом от переменной x с коэффициентами в формальных степенных рядах от переменной t над произвольным полем \mathbb{k} . Если при $t = 0$ многочлен $G(0, x) \in \mathbb{k}[x]$ раскладывается в $\mathbb{k}[x]$ в произведение взаимно простых множителей $a(x)$ и $b(x)$ положительных степеней, то и $G(t, x)$ раскладывается в $\mathbb{k}[[t]][x]$ в произведение многочленов $A(t, x)$ и $B(t, x)$ тех же степеней по x , что $a(x)$ и $b(x)$, и таких, что $A(0, x) = a(x)$ и $B(0, x) = b(x)$.

Доказательство. Запишем данный ряд $G(t, x)$ и искомые ряды $A(t, x)$ и $B(t, x)$ в виде рядов от переменной t с коэффициентами в $\mathbb{k}[x]$:

$$\begin{aligned} G(t, x) &= g_0(x) + g_1(x)t + g_2(x)t^2 + \dots \\ A(t, x) &= a_0(x) + a_1(x)t + a_2(x)t^2 + \dots \\ B(t, x) &= b_0(x) + b_1(x)t + b_2(x)t^2 + \dots \end{aligned}$$

и приравняем коэффициенты при t^k в равенстве $G_t(x) = A_t(x) \cdot B_t(x)$:

$$\begin{aligned} a_0(x) b_0(x) &= g_0(x) && (\text{при } k = 0) \\ a_0(x) b_k(x) + b_0(x) a_k(x) &= g_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} a_i(x) b_{k-i}(x) && (\text{при } k \geq 1). \end{aligned} \quad (4-33)$$

Взаимно простые многочлены $a_0(x) = a(x)$ и $b_0(x) = b(x)$, удовлетворяющие первому равенству, даны по условию. Второе равенство однозначно определяет многочлены a_k и b_k степеней $\deg a_k < \deg a$ и $\deg b_k < \deg b$, как только известны все предыдущие многочлены a_i и b_i и известно, что $\deg a_i < \deg a$ и $\deg b_i < \deg b$ при всех $i < k$. В самом деле, так как G приведён как многочлен от x , $\deg g_i < \deg g_0$ при всех $i > 0$ и степень многочлена из правой части формулы (4-33) строго меньше $\deg a_0 \cdot \deg b_0$. Тем самым, b_k — это единственный многочлен степени $< \deg b_0$ класс которого по модулю b_0 равен отношению класса правой части формулы (4-33) к классу $a_0 \pmod{b_0}$, а класс b_k играет аналогичную роль по модулю b_0 (ср. с доказательством существования в предл. 4.1). Поскольку степени всех получающихся многочленов $a_i(x)$ и $b_i(x)$ строго меньше, чем $\deg a_0$ и $\deg b_0$ соответственно, ряды $A(t)$ и $B(t)$ являются приведёнными многочленами от x тех же степеней, что a_0 и b_0 . \square

Упражнение 4.15. Покажите, что многочлены A и B , построенные в доказательстве лем. 4.4, взаимно просты в кольце $\mathbb{k}[[t]][x]$.

Лемма 4.5

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики нуль для любого многочлена

$$F(t, x) = a_n(t)x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_0(x) \in \mathbb{k}((t))[x]$$

от переменной x с коэффициентами в поле $\mathbb{k}((t))$ существуют число $m \in \mathbb{N}$ и ряд Лорана $\vartheta(t) \in \mathbb{k}((t))$, такие что $F(t^m, \vartheta(t)) = 0$ в поле $\mathbb{k}((t))$. Иными словами, каждый многочлен с коэффициентами в поле рядов Лорана от t после замены параметра t параметром t^m с надлежащим¹ $m \in \mathbb{N}$ приобретает в поле $\mathbb{k}((t))$ корень.

Доказательство. Не ограничивая общности мы можем и будем далее считать, что многочлен F имеет коэффициенты в $\mathbb{k}[[t]]$, причём старший коэффициент $a_n = 1$, а следующий за ним коэффициент $a_{n-1} = 0$: первого можно добиться, умножив F на подходящую степень t , второго — умножив полученный многочлен на a_n^{n-1} и заменив x на $y = a_n x$, третьего — заменив y на $z = y - a_{n-1}/n$.

Упражнение 4.16. Убедитесь, что в каждом из трёх случаев умение находить корень для изменённого многочлена позволяет найти его и для исходного многочлена.

Если $F(t, x) = x^n$, мы можем взять $q = 1$ и $\vartheta = 0$. Поэтому мы будем далее считать, что среди коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_{n-2} есть ненулевые ряды. Если F приводим, мы можем воспользоваться индукцией по $\dim F$ и подобрать m и ϑ для многочлена меньшей степени, делящего F . Таким образом, нам надо сделать многочлен F приводимым. По лемме Гензеля для приводимости F достаточно, чтобы многочлен $F(0, x) \in \mathbb{k}[x]$ можно было разложить в $\mathbb{k}[x]$ на два взаимно простых множителя положительной степени. Поскольку поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, последнего разложения не существует лишь тогда, когда $F(0, x) = (x - \alpha)^n$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{k}$. Многочлен $(x - \alpha)^n$ либо равен x^n , либо содержит x^{n-1} с ненулевым коэффициентом² $n\alpha$. По нашему предположению, многочлен F не содержит x^{n-1} . Поэтому нам достаточно добиться того, чтобы хоть один из рядов a_0, a_1, \dots, a_{n-2} не обращался в нуль при $t = 0$, т. е. имел бы ненулевой свободный член.

¹т. е. после извлечения из параметра корня должной степени

²здесь существенно, что $\text{char } \mathbb{k} = 0$!

Для этого запишем ненулевые коэффициенты многочлена F в виде

$$a_m(t) = \alpha_{\mu_m} t^{\mu_m} + \text{члены большей степени по } t, \quad \text{где } \mu_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ и } \alpha_{\mu_m} \neq 0,$$

выберем из дробей μ_m/m наименьшую, обозначим через p/q её несократимую запись и сделаем в многочлене

$$F(t, x) = x^n + \sum_{m=0}^{n-2} a_m(t) x^m$$

подстановку $t \leftarrow t^q, x \leftarrow t^p y$. Получим многочлен

$$\begin{aligned} G(t, y) &= F(t^q, t^p y) = t^{pn} y^n + \sum_{m=0}^{n-2} a_m(t^q) t^{pm} y^m = \\ &= t^{pn} \left(y^n + \sum_{m=0}^{n-2} t^{q\mu_m - pm} (\alpha_{\mu_m} + \text{члены, делящиеся на } t) \cdot y^m \right). \end{aligned}$$

Так как $q\mu_m \geq pm$ для всех m , ряды-коэффициенты в правой сумме лежат в $\mathbb{k}[[t]]$, и по крайней мере один из них — тот, у которого $q\mu_m = pm$, — отличен от нуля при $t = 0$.

Тем самым, приведённый многочлен $G(t, y)/(t^{pn})$ раскладывается в $\mathbb{k}[[t]][y]$ в произведение многочленов меньшей степени, и по индукции существуют число $d \in \mathbb{N}$ и ряд Лорана $\tau(t)$, для которых $G(t^d, \tau(t)) = 0$ в $\mathbb{k}((t))$. Тогда для $m = qd$ и $\vartheta(t) = t^p \tau(t)$ выполняется нужное нам равенство $F(t^m, \vartheta(t)) = F(t^{qd}, t^p \tau(t)) = G(t^d, \tau(t)) = 0$. \square

Упражнение 4.17. Выведите теор. 4.3 из лем. 4.5.

Замечание 4.3. В доказательстве лем. 4.5 мы явно воспользовались условием $\text{char } \mathbb{k} = 0$, и без этого предположения лем. 4.5 (а с нею и теор. 4.3) неверна.

Пример 4.9

Рассмотрим уравнение $x^p - x = t^{-1}$ над полем $\mathbb{F}_p((t))$, и будем искать его решение в виде $x(t) = a_1 t^{\lambda_1} + a_2 t^{\lambda_2} + \dots$ с рациональными $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ и $a_i \neq 0$. Поскольку $a^p = a$ для всех $a \in \mathbb{F}_p$, подставляя ряд в домноженное на t уравнение $t x^p - t x = 1$, мы получаем

$$-a_1 t^{\lambda_1+1} + a_2 t^{\lambda_2+1} - a_1 t^{p\lambda_1+1} + a_3 t^{\lambda_3+1} - a_2 t^{p\lambda_2+1} + \text{старшие члены}.$$

Поскольку младшему члену $a_1 t^{\lambda_1+1}$ не с чем сократиться кроме единицы в правой части, мы заключаем, что $\lambda_1 = -1$ и $a_1 = -1$. Следующие два члена обязаны сокращать друг друга, откуда $\lambda_2 = -1/p$ и $a_2 = a_1$, следующие два члена также обязаны сокращать друг друга, откуда $\lambda_3 = -1/p^2$ и $a_3 = a_2$, и т. д. В результате получаем ряд

$$x(t) = -t^{-1} - t^{-1/p} - t^{-1/p^2} - t^{-1/p^3} - \dots = -\sum_{k \geq 0} t^{-p^k},$$

который не является рядом Пиюзона, т. к. у его показателей нет общего знаменателя.

4.7.1. Метод Ньютона для явного отыскания рядов Пюизо $x_1(t), \dots, x_n(t)$, являющихся корнями заданного многочлена

$$F(t, x) = a_n(t)x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_0(x) \in \mathbb{k}[[t]][x] \quad (4-34)$$

заключается в следующем. Сначала находим все корни многочлена $F(0, x) \in \mathbb{k}[x]$, получающегося из F при $t = 0$, и для каждого такого корня ξ делаем замену $x \leftarrow \xi + x$. После этого $x = 0$ становится корнем $F(0, x)$, и мы будем искать продолжающий этот нулевой корень ряд Пюизо в виде

$$x(t) = c_1 t^{\varepsilon_1} + c_2 t^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + c_3 t^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} + \dots \quad (4-35)$$

с положительными $\varepsilon_i \in \mathbb{Q}$ и ненулевыми $c_i \in \mathbb{k}$. Запишем коэффициенты многочлена $F(t, x)$ как

$$a_m(t) = \alpha_{\mu_m} t^{\mu_m} + \text{члены большей степени по } t, \quad \text{где } \alpha_{\mu_m} \neq 0,$$

и будем называть целое неотрицательное число μ_m *порядком* коэффициента a_m . На координатной плоскости отметим все целые точки (p, q) , такие что моном¹ $x^p t^q$ входит в $F(t, x)$ с ненулевым коэффициентом и возьмём их выпуклую оболочку. Граница этой выпуклой оболочки называется *многоугольником Ньютона* многочлена $F(t, x)$.

Видимая из начала координат часть границы многоугольника Ньютона представляет собою ломаную, вершинами которой служат некоторые из точек (m, μ_m) , отвечающих младшим по t членам коэффициентов a_m . Мы будем называть её *ломаной Ньютона*.

К примеру, на [рис. 4◊1](#) показан многоугольник Ньютона многочлена

$$(-t^3 + t^4) - 2t^2 x - t x^2 + 2t x^4 + x^5, \quad (4-36)$$

и его ломаная Ньютона состоит из двух красных отрезков.

Упражнение 4.18. Приведите пример такого многочлена, что не все точки (m, μ_m) лежат на ломаной Ньютона.

Подставим ряд (4-35) в многочлен (4-34). Младшие по t члены в $x^m(t)$ и $a_m(t)$ перемножатся в одночлен

$$a_{\mu_m} c_1^m t^{m\varepsilon_1 + \mu_m}. \quad (4-37)$$

Несколько таких одночленов можно сократить друг с другом за счёт надлежащего подбора коэффициента c_1 у ряда (4-35), если и только если они имеют один и тот же показатель при t , т. е. когда у них одно и то же значение $m\varepsilon_1 + \mu_m$. Такие одночлены происходят из мономов $x^p t^q$, лежащих на прямой $p\varepsilon_1 + q = \text{const}$, содержащей одно из звеньев ломаной Ньютона. Таким образом, в качестве показателя ε_1 должно выступать отношение α/β координат вектора $n = (\alpha, \beta)$, перпендикулярного какому-нибудь звену ломаной Ньютона.

¹обратите внимание, что мы откладываем показатели при x вдоль *горизонтальной* оси

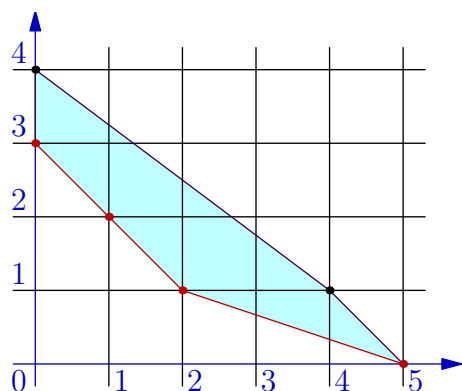


Рис. 4◊1.

И чтобы одночлены (4-37), приходящие из всех лежащих на выбранном звене мономов $x^p t^q$, сократились друг с другом, константа c_1 , отвечающая такому ребру, должна удовлетворять уравнению

$$a_{\mu_k} + b_{\mu_{k+1}} c_1 + b_{\mu_{k+2}} c_1^2 + \dots + b_{\mu_{k+\ell-1}} c_1^{\ell-1} + a_{\mu_{k+\ell}} c_1^\ell, \tag{4-38}$$

где $k, k+1, \dots, k+\ell$ суть целые точки горизонтальной оси, накрываемые горизонтальной проекцией выбранного ребра, ℓ — длина этой проекции, а коэффициенты $b_{\mu_{k+i}} = a_{\mu_{k+i}}$, если точка $(k+i, a_{\mu_{k+i}})$ лежит на ребре, и $b_{\mu_{k+i}} = 0$, если она лежит выше ребра.

Для каждого из рёбер ломаной Ньютона и каждого корня c_1 уравнения (4-38) мы подставляем $x = t^{\varepsilon_1} (c_1 + x_1)$ в многочлен (4-34), делим получающийся многочлен от x_1 на t^γ , где γ — значение линейной функции $p\varepsilon_1 + q$ на выбранном ребре¹, и снова применяем к нему предыдущую процедуру, что даст следующие ε_2 и c_2 в разложении (4-35) и т. д.

Например, для многочлена (4-36) вектор нормали к левому звену ломаной Ньютона на рис. 4◊1 равен (1, 1). Поэтому $\varepsilon_1 = 1$, а c_1 удовлетворяет уравнению $-1 - 2c_1 - c_1^2 = 0$, имеющему двукратный корень $c_1 = -1$. Подставляя $x = t(x_1 - 1)$ в (4-36) и деля на t^3 , получаем² многочлен

$$-x_1^2 + t + t^2(-1 + x_1)^4(1 + x_1) = (t + t^2) - 3t^2 x_1 + (-1 + 2t^2) x_1^2 + 2t^2 x_1^3 - 3x^2 x_1^4 + t^2 x_1^5$$

с многоугольником Ньютона, показанным на рис. 4◊2. Его ломаная Ньютона состоит из единственного звена с вектором нормали (1, 2), что даёт $\varepsilon_2 = 1/2$ и уравнение $-1 - c_2^2 = 0$ с корнями $c_2 = \pm 1$. Подставляя, скажем, $x_1 = x^{1/2}(1 + x_2)$ получаем, что x_2 является корнем многочлена вида

$$(t - 3t^{3/2} + \dots) + (-2 - 3t^{3/2} + \dots) x_2 + (-1 - 2t^3 + \dots) x_2^2 + \dots,$$

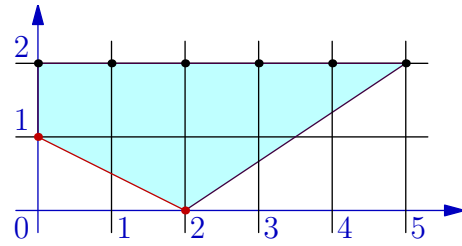


Рис. 4◊2.

ломаная Ньютона которого состоит из единственного звена, соединяющего точки (0, 1) и (1, 0).

Упражнение 4.19. Убедитесь, что на всех последующих шагах ломаная Ньютона будет также состоять из единственного звена, соединяющего точки (0, 1) и (1, 0), так что получающееся на этом пути решение является степенным рядом от $t^{1/2}$, и найдите первые 5 ненулевых коэффициентов.

Вектор нормали к правому звену ломаной на рис. 4◊1 равен (1, 3), что даёт $\varepsilon_1 = 1/3$ и уравнение $-1 + c_1^3 = 0$, имеющее корни $c_1 = 1, \omega, \omega^2$, где $\omega \in \mathbb{K}$ — первообразный кубический корень из единицы. Подставляя в (4-36), скажем, $x = t^{1/3}(\omega + x_1)$ и сокращая на $t^{5/3}$, получаем многочлен

$$(-t^{4/3} + t^{7/3}) + (3\omega + 6t^{2/3}) x_1 + (9 + 12\omega^2 t^{2/3}) x_1^2 + (10\omega^2 + 8\omega t^{2/3}) x_1^3 + (5\omega + 2t^{2/3}) x_1^4 + x_1^5,$$

ломаная Ньютона которого опять-таки состоит из единственного звена, соединяющего точки (0, 1) и (1, 0), так что по упр. 4.19 искомое решение является степенным рядом с

¹т. е. общий показатель у t во всех сокращаемых мономах (4-37)

²в ходе этого вычисления удобно сгруппировать вместе мономы $x^p t^q$, лежащие на параллельных выбранному ребру прямых $p + q = \text{const}$

натуральными показателями от $x^{1/3}$, который легко найти методом неопределённых коэффициентов.

Упражнение 4.20. Докажите [лем. 4.5](#) непосредственно следуя методу Ньютона. Для этого проверьте, что а) знаменатель дроби $\varepsilon_1 \in \mathbb{Q}$ не превосходит длины горизонтальной проекции выбранного звена ломаной Ньютона б) длины горизонтальных проекций рёбер ломаной Ньютона для уравнения на x_1 не превосходят кратности выбранного корня c_1 уравнения (4-38) в) если в ломаной Ньютона для уравнения на x_1 имеется ребро с той же длиной ℓ горизонтальной проекции, что была у ребра, использованного для отыскания ε_1 и c_1 , то $\varepsilon_1 \in \mathbb{N}$. Выведите из этих утверждений, что результатом вычисления по методу Ньютона является ряд Пуизо (4-35), являющийся корнем исходного многочлена $F(t, x)$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.3. Равенство несократимых записей $p/q = r/s$ означает равенство $ps = qr$, в котором p взаимно просто с q , а s взаимно просто с r . Из лем. 2.3 следует, что в этом случае $p = rf$, а $q = sg$, откуда $frs = grs$ и $f = g$. Поскольку запись p/q предполагалась несократимой, $\deg f = 0$.

Упр. 4.5. Согласно правилу дифференцирования композиции $(f^m)' = m \cdot f^{m-1} \cdot f'$, имеем $\frac{d}{dx}(1-x)^{-m} = \left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^m\right)' = m(1-x)^{-m-1}$, откуда нужная формула легко получается по индукции.

Упр. 4.7. Продифференцируйте обе части.

Упр. 4.9. Линейность отображений $f(D)$ следует из линейности отображения D и того, что суммы и композиции линейных отображений также являются линейными отображениями.

Упр. 4.11. Ответы: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{30}$, $a_5 = 0$, $a_6 = \frac{1}{42}$, $a_7 = 0$, $a_8 = -\frac{1}{30}$, $a_9 = 0$, $a_{10} = \frac{5}{66}$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -\frac{691}{2730}$,

$$\begin{aligned} S_4(n) &= n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30 \\ S_5(n) &= n^2(n+1)^2(2n+1)(2n^2+2n-1)/12 \\ S_{10}(1000) &= 91\,409\,924\,241\,424\,243\,424\,241\,924\,242\,500. \end{aligned}$$

Упр. 4.13. $\nabla(x^n) = (-1)^n n x^{n-1} +$ младшие члены, $D = -\ln(1-\nabla) = -\nabla - \nabla^2/2 - \nabla^3/3 - \dots = -\sum_{k \geq 0} \nabla^k/k$.

Упр. 4.14. Первое вытекает из рекурсивной формулы для биномиальных коэффициентов

$$\binom{x+k-1}{k-1} + \binom{x+k-1}{k} = \binom{x+k}{k}.$$

Если $f = \sum_{\nu} c_{\nu} \gamma_{\nu}$, то $\nabla^k f(-1) = \sum_{\nu} c_{\nu} \gamma_{\nu-k}(-1) = c_k$, поскольку $\gamma_m(-1) = 0$ при $m \neq 0$. Существование разложения устанавливается индукцией по $n = \deg f$: пусть $g = \sum_{k=0}^n \nabla^k f(-1) \gamma_k$.

Тогда $g(-1) = f(-1)$ и, т. к. $\deg \nabla f < n$, по индукции $\nabla f = \sum_{k=0}^{n-1} \nabla^{k+1} f(-1) \gamma_k = \nabla g$; тем самым f и g принимают равные значения во всех целых точках, а значит, $f = g$ в $\mathbb{Q}[x]$.

Упр. 4.15. Надо подобрать $p_i, q_i \in \mathbb{k}[x]$ ограниченной степени так, чтобы ряды

$$P(t, x) = p_0(x) + p_1(x)t + p_2(x)t^2 + \dots \quad \text{и} \quad Q(t, x) = q_0(x) + q_1(x)t + q_2(x)t^2 + \dots,$$

удовлетворяли равенству $AP + BQ = 1$. Приравняем у обеих частей коэффициенты при t^k :

$$\begin{aligned} a_0 p_0 + b_0 q_0 &= 1 && (\text{при } k = 0) \\ a_0 p_k + b_0 q_k &= -\sum_{i=1}^{k-1} (a_i p_{k-i} + b_i q_{k-i}) && (\text{при } k \geq 1). \end{aligned}$$

Так как a_0 и b_0 взаимно просты, и $\deg a_i < \deg a_0$, $\deg b_i < \deg b_0$ при всех $i > 0$, написанные соотношения однозначно определяют многочлены p_i и q_i степеней, строго меньших, чем $\deg a_0$ и $\deg b_0$ соответственно.

Упр. 4.16. Если m и $\vartheta(t)$ решают модифицированную задачу, то для первой модификации они же решают и исходную задачу, а для второй и третьей модификаций решение исходной задачи даётся тем же m и рядами $\vartheta(t)/a_n(t^q)$ и $\vartheta(t) + a_{n-1}(t^q)/n$ соответственно.

Упр. 4.17. Пусть многочлен $f(x) = a_0(t) + a_1(t)x + \dots + a_n(t)x^n$ имеет коэффициенты $a_i(t)$ в поле рядов Пюизо. Обозначим общий знаменатель всех показателей всех рядов a_i через m и положим $t = u^m$. Тогда $a_i(t) = a_i(u^m) \in \mathbb{k}((u))$ и по лем. 4.5 после ещё одной подстановки $u = s^q$ у многочлена f появится корень в поле $\mathbb{k}((s))$. Возвращаясь к старому параметру $t = s^{qm}$ получаем корень многочлена f в виде ряда Пюизо от $t^{\frac{1}{qm}}$.

Упр. 4.19. То, что ломаная будет состоять из одного звена, вытекает из упр. 4.20 ниже. Коль скоро известно, что решение имеет вид $x(t) = \sum_{k \geq 1} c_k t^{k/2}$, достаточно подставить этот ряд в уравнение и найти c_i .

Упр. 4.20. Утверждение (а) очевидно. Для доказательства (б) достаточно убедиться, что уравнение на x_1 содержит с ненулевым коэффициентом моном $x_1^d t^0$ — тогда ломаная Ньютона выходит на горизонтальную координатную ось заведомо не правее точки $(d, 0)$. Для этого перепишем F , сгруппировав вместе мономы, расположенные на прямых $p\varepsilon_1 + q = \text{const}$

$$F(t, x) = \sum_{k \geq \gamma} f_k(x, t), \quad \text{где} \quad f_k(x, t) = \sum_{\substack{p, q: \\ p\varepsilon_1 + q = k}} \alpha_{p, q} x^p t^q.$$

Подстановка $x = t^{\varepsilon_1}(c_1 + x_1)$ превращает $f_k(x, t)$ в $t^k f_k(c_1 + x_1, 1)$. Уравнение (4-38) на c_1 имеет вид $f_\gamma(c_1, 1) = 0$. Пусть c_1 является его d -кратным корнем, т. е. $f_\gamma(x, 1) = (x - c_1)^d g(x)$, где $g(c_1) \neq 0$. Тогда $f_\gamma(c_1 + x_1, 1) = x_1^d g(c_1) + \text{старшие степени } x_1$, что и требовалось¹. Утверждение (в) следует из (б): длины горизонтальных проекций всех рёбер ломаной Ньютона для уравнения на x_1 строго меньше длины ℓ горизонтальной проекции ребра, выбранного для отыскания ε_1 , всегда, кроме случая, когда c_1 является ℓ -кратным корнем многочлена $f_\gamma(x, 1)$, который в этом случае с точностью до ненулевого постоянного множителя равен $(x - c_1)^\ell$ и содержит все без исключения мономы x^v с $0 \leq v \leq \ell$. Это означает, что вектор нормали к этому ребру имеет координаты $(d, 1)$ с $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_1 = d \in \mathbb{N}$. Из (а), (б) и (в) вытекает, что всякий раз, когда ε_i не является целым, максимальная из длин горизонтальных проекций рёбер ломаной Ньютона для уравнения на x_i будут строго меньше, чем на предыдущем шаге. Поэтому в последовательности ε_i имеется лишь конечное число нецелых показателей, и у них есть общий знаменатель.

¹обратите внимание, что это рассуждение существенно использует, что $\text{char } \mathbb{k} = 0$