Математический анализ, 2 курс, 2012/13 уч.г.

Листок № 8, 26 октября 2012 года.

Задачи с пометкой ‘ можно сдавать только в день выдачи листка. Остальные задачи можно сдавать до следующего занятия включительно.

1‘. Пусть ξ и ν – векторные поля. Докажите, что $L_\xi \nu = [\xi, \nu]$.
2‘. Выведите формулу для производной Ли $L_\xi \omega$, где $\omega = \sum \omega_i dx^i$ и $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.
3‘. Определим поле Картана c на $\mathbb{R}^n$ формулой $c = \sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Вычислите производную Ли $L_c \omega$, где ω – p-форма, все коэффициенты которой – однородные многочлены степени d.
4‘. Пусть ω – 1-форма на многообразии, ξ, ν – векторные поля. Докажите, что

$$d\omega(\xi, \nu) = \xi \cdot \omega(\nu) - \nu \cdot \omega(\xi) - \omega([\xi, \nu]).$$

5. Докажите, что производная Ли от тензора коммутирует с операцией взятия следа.
6. Пусть ξ – векторное поле, а T_1, T_2 – два тензорных поля. Докажите, что

$$L_\xi (T_1 \otimes T_2) = L_\xi T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes L_\xi T_2.$$

7. Пусть ω – 1-форма, задающая поле гиперплоскостей. Докажите, что это поле интегрируемо тогда и только тогда, когда $\omega \wedge d\omega = 0$.
8. Постройте интегрируемое распределение гиперплоскостей на S^3.