

Математический анализ, 2 курс, 2012/13 уч.г.

Листок № 5, 5 октября 2012 года.

Задачи с пометкой ‘ можно сдавать только в день выдачи листка. Остальные задачи можно сдавать до следующего занятия включительно.

1'. Вычислить внешний дифференциал формы

$$z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y) dx \wedge dz.$$

2'. Найдите $f^*\omega$, если

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

а f – отображение $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.

3'. Докажите, что форма ω из предыдущей задачи замкнута, но не точна в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

4'. Отождествим векторные поля с 1-формами на \mathbb{R}^3 формулой

$$\sum a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \sum a^i(x) dx^i.$$

Отождествим 1-формы на \mathbb{R}^3 с 2-формами на \mathbb{R}^3 формулой

$$\sum a_i(x) dx^i \mapsto a_1(x) dx^2 \wedge dx^3 - a_2(x) dx^1 \wedge dx^3 + a_3(x) dx^1 \wedge dx^2.$$

Докажите, что при этих отождествлениях ротор векторного поля совпадает с дифференциалом соответствующей 1-формы.

5'. Пусть $N \subset M$ – подмногообразие. Формы на M можно ограничивать на N . Докажите, что ограничение замкнутой (точной) формы является замкнутым (точным).

6. Вычислите когомологии де Рама окружности S^1 .

7. Вычислите старшие когомологии де Рама сферы S^n .

8. Вычислите старшие когомологии де Рама произвольного замкнутого ориентируемого многообразия.

9. Вычислите старшие когомологии де Рама произвольного замкнутого неориентируемого многообразия.