Теория Галуа: малые степени

A4.1. Пусть K/F — расширение Галуа с группой $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Докажите, что $K = F(\sqrt{d})$.

A4.2. Пусть K/F — расширение Галуа с группой $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, и пусть еще F содержит кубический корень из единицы ζ. Докажите, что $L = K(\sqrt[3]{d})$.

Указание. Пусть α_1, α_2, α_3 — базис K/F, который переставляет группа Галуа. Рассмотрите элементы $\beta_k = \sum_i \alpha_i \zeta^{ik}$.

A4.3. Пусть f — многочлен над полем F без кратных корней, α_i — его корни (в алгебраическом замыкании F). Докажите следующие утверждения:

а) *Дискриминант* $\prod(\alpha_i - \alpha_j)^2$ лежит в поле F.

б) Группа Галуа состоит из четных перестановок корней тогда и только тогда, когда дискриминант является полным квадратом.

A4.4. Найдите

а) дискриминант;

б) группу Галуа неприводимого кубического многочлена $x^3 + px + q$.

A4.5. а) Пусть α_i — корни кубического уравнения, а β_j определены формулами из указания ко второй задаче. Докажите, что β_j^3 рационально выражается через коэффициенты уравнения и корень из дискриминанта.

б) Выведите явную формулу для корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ (скорее всего, получится *формула Кардано*).

A4.6. Пусть α_i — корни уравнения четвертой степени.

а) Докажите, что квадраты трех элементов γ_k вида $\frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k - \alpha_l)$ порождают расширение, группа Галуа которого вложена в S_3.

б) Пусть исходное уравнение имеет вид $x^4 + px^2 + qx + r$. Запишите явно кубическое уравнение, корнями которого являются числа γ_k^2 (скорее всего, получится *метод Феррари*).

A4.7. Какой может быть группа Галуа многочлена четвертой степени? Приведите примеры.