Листок 8

1. Докажите, что матрица, обратная к целочисленной матрице, целочисленна тогда и только тогда, когда модуль ее определителя равен единице.

2. Докажите, что над полем характеристики ноль определитель кососимметрической матрицы размера $(2n+1) \times (2n+1)$ равен нулю. Остаётся ли это утверждение верным над произвольным полем?

3. Пусть A квадратная матрица, $\tilde{a}_{i,j}$ – алгебраическое дополнение к элементу $a_{i,j}$. Найдите определитель матрицы, составленной из $\tilde{a}_{i,j}$.

4. Назовём внешнюю форму разложимой, если её можно представить в виде внешнего произведения двух форм положительной степени. Докажите, что разложимая 2-форма ω удовлетворяет условию $\omega \wedge \omega = 0$. Верно ли обратное утверждение?

5. Вычислите определители матриц

$$\begin{pmatrix} p & q & q & \cdots & q & q \\ q & p & q & \cdots & q & q \\ q & q & p & \cdots & q & q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q & q & q & \cdots & q & p \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $p_i(x)$ – набор многочленов, таких что $\deg p_i < i$. Вычислите определитель матрицы $p_i(x_j)$.