

## Листок 2

1. Являются ли линейными пространствами относительно естественных операций следующие множества: арифметические прогрессии; геометрические прогрессии; последовательности Фибоначчи (последовательности, удовлетворяющие условию  $x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$ ); функции вида  $a \sin(x + c)$ ?
2. Найдите сумму и пересечение пространств многочленов, делящихся на фиксированные многочлены  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$ .
3. Найдите размерность и базис факторпространства пространства всех отображений из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$  по подпространству отображений, обращающихся в ноль в точках  $\cos(2\pi k/17) + i \sin(2\pi k/17)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
4. Пусть  $V$  – векторное пространство,  $A, B \in \text{End}V$ . Докажите, что если  $\text{id} + AB$  изоморфизм, то и  $\text{id} + BA$  тоже.
5. Пусть  $V_0$  – подпространство пространства  $V$ . Докажите, что  $V$  конечномерно тогда и только тогда, когда  $V_0$  и  $V/V_0$  конечномерны.
6. Найдите какой-нибудь базис и размерность пространства многочленов  $P(x)$  степени не выше  $n$ , таких что  $P(2) = P(4) = 2P(7)$ .
7. Рассмотрим векторы  $e_1, e_2, e_3$ , заданные координатами в некотором базисе следующим образом:  $e_1 = (2, 1, -3)$ ,  $e_2 = (3, 2, -5)$ ,  $e_3 = (1, -1, 1)$ . Докажите, что векторы  $e_1, e_2, e_3$  также образуют базис. Выразите через этот базис вектор  $x$ , имеющий в старом базисе координаты  $(6, 2, -7)$ .