Вспомним алгебраическую геометрию

Задача 1°. [1] Покажите, что над полем характеристики ноль проективная кривая степени два (т. е. квадрика) $F(x,y,z)=0$ неприводима тогда и только тогда, когда 3×3 матрица частных производных F имеет ненулевой определитель. Когда это утверждение остаётся верным в характеристике p?

Задача 2°. Найдите особые точки на следующих аффинных многообразиях и их проективизациях:
a) $y^2=x^3$; b) $4x^2y^2=(x^2+y^2)^3$; c) $y^2=x^4+y^4$; d) $x^2+y^2=(z-1)^2$.

Задача 3°. При каких a и b следующие проективные кривые особы:
a) $y^2z+axyz+byz^2=x^3$; b) $y^2z=x^3+axz^2+bz^3$.

Задача 4. Пусть $V\subset\mathbb{A}^n$ — многообразие над полем K, заданное одним уравнением. Докажите, что точка $P\in V$ неособа тогда и только тогда, когда

$$\dim_{\bar K}\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2=\dim V.$$

($\mathfrak{m}_P$ — идеал функций, обращающихся в ноль в точке P).

Задача 5°. Пусть многообразие V есть множество нулей однородного многочлена $f\in K[x_0,\dots,x_n]$. Докажите, что $P\in V$ — особая точка тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial x_0}(P)=\dots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(P)=0$.

Задача 6 (поле определения и группа Галуа).
a) Пусть V/K — аффинное многообразие. Покажите, что $K[V]=\{f\in\bar K[C]\mid f^\sigma=f \text{ для всех } \sigma\in G_K=\mathrm{Gal}(\bar K/K)\}$.
b) Докажите, что $\mathbb{P}^n(K)=\{P\in\mathbb{P}^n(\bar K)\mid P^\sigma=P \text{ для всех } \sigma\in G_K\}$.
c) Пусть $\phi\colon V_1\to V_2$ — рациональное отображение проективных многообразий. Докажите, что ϕ определено над K в том и только том случае, когда $\phi^\sigma=\phi$ для всех $\sigma\in G_K$.
Подсказка: воспользуйтесь теоремой Гильберта 90. Если не получится, посмотрите указания к задаче 1.12 в книге Silverman'а про эллиптические кривые.

Задача 7° (морфизм Фробениуса). Пусть $V\subset\mathbb{P}^n$ — проективное многообразие над конечным полем $\mathbb{F}_q$.
a) Покажите, что $\phi\colon[x_0,\dots,x_n]\mapsto[x_0^q,\dots,x_n^q]$ определяет биективный морфизм из V в V.
b) Является ли этот морфизм изоморфизмом?
c) Убедитесь, что $V(\mathbb{F}_q)=\{P\in V\mid\phi(P)=P\}$.

Задача 8°. a) Пусть C — кривая $y^2z=x^3$. Покажите, что отображение $\phi\colon\mathbb{P}^1\to C$, заданное как $\phi([s,t])=[s^2t,s^3,t^3]$, является регулярным морфизмом. Найдите обратное рациональное отображение $\psi\colon C\to\mathbb{P}^1$. Является ли ψ изоморфизмом?
b) Ответьте на аналогичные вопросы для $C\colon y^2z=x^3+x^2z$ и отображения $\phi([s,t])=[(s^2-t^2)t,(s^2-t^2)s,t^3]$.

Задача 9°. Пусть C_p — кривая в $\mathbb{P}^2$, заданная уравнением $x^2+y^2=pz^2$.
a) Докажите, что C_p изоморфна $\mathbb{P}^1$ над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда $p\equiv 1\mod 4$.
b) Покажите, что при $p\equiv 3\mod 4$ эти кривые попарно не изоморфны над $\mathbb{Q}$ и не изоморфны $\mathbb{P}^1$.

Задача 10. Пусть R — нётерова локальная область целостности (т.е. область целостности с единственным максимальным идеалом), не являющаяся полем, и $k=R/\mathfrak{m}$ — её поле вычетов. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

[1] Задачи со значком ° очень рекомендуется научиться решать.

(i) R — кольцо дискретного нормирования;

(ii) $\mathfrak{m}$ является главным;

(iii) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.

Задача 11°. Пусть $\phi\colon C_1 \to C_2$ — непостоянное отображение гладких кривых, $f \in \bar{K}(C_2)^\times$ и $P \in C_1$. Докажите, что $\mathrm{ord}_P(\phi^* f) = e_\phi(P) \cdot \mathrm{ord}_{\phi(P)}(f)$, где $e_\phi(P)$ — индекс ветвления f в P.

Задача 12. Пусть C/K — гладкая кривая, заданная над полем характеристики $p > 0$, и $t \in K(C)$. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

(i) $K(C)$ — конечное сепарабельное расширение $K(t)$.

(ii) Для всех точек $P \in C$, кроме, быть может, конечного числа, функция $t - t(P)$ — униформизующая в P.

(iii) $t \notin K(C)^p$.

Задача 13. Пусть C/K — гладкая кривая и $P \in C(K)$. Докажите, что $K(C)$ содержит униформизующую C в точке P, то есть, что существуют униформизующая в P, определённая над K.

Задача 14°. Пусть C — гладкая кривая. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны (над $\bar{K}$):

(i) C изоморфна $\mathbb{P}^1$.

(ii) C имеет род 0.

(iii) Существуют различные точки $P, Q \in C$ такие, что $(P) \sim (Q)$ (линейная эквивалентность дивизоров).

Задача 15. Пусть $F(X, Y, Z) \in K[X, Y, Z]$ — однородный многочлен степени $d \geq 1$. Предположим, что кривая $C \subset \mathbb{P}^2$, задаваемая уравнением $F = 0$, неособа. Докажите, что род кривой C равен $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.
Подсказка: определите отображение $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ и воспользуйтесь формулой Гурвица.

Задача 16°. Пусть $\phi\colon C_1 \to C_2$ — непостоянное сепарабельное отображение гладких кривых.

a) Докажите, что род C_1 больше либо равен рода C_2.

b) Докажите, что, если C_1 и C_2 имеют одинаковый род g, то, либо $g = 0$, либо $g = 1$ и ϕ неразветвлено, либо $g \geq 2$ и ϕ — изоморфизм.

Задача 17. Пусть C — гладкая кривая. Носитель дивизора $D = \sum n_P(P) \in \mathrm{Div}(C)$ — это множество точек $P \in C$, для которых $n_P \neq 0$. Пусть f — такая функция, что $\mathrm{div}(f)$ и D имеют непересекающиеся носители. Тогда мы можем определить

$$f(D) = \prod_{P \in C} f(P)^{n_P}.$$

Далее, пусть $\phi\colon C_1 \to C_2$ — непостоянное отображение гладких кривых. Докажите, что следующие два равенства справедливы, если обе части равенства определены:

a) $f(\phi^*D) = (\phi_* f)(D)$ для всех $f \in \bar{K}(C_1)^\times$ и $D \in \mathrm{Div}(C_2)$.
b) $f(\phi_* D) = (\phi^* f)(D)$ для всех $f \in \bar{K}(C_2)^\times$ и $D \in \mathrm{Div}(C_1)$.

Задача 18. Пусть C/K — кривая.

a) Докажите, что следующая последовательность точна:

$$1 \to K^\times \to K(C)^\times \to \mathrm{Div}_K^0(C) \to \mathrm{Pic}_K^0(C).$$

b) Предположим, что C имеет род 1 и $C(K)$ непусто. Докажите, что отображение из $\mathrm{Div}_K^0(C)$ в $\mathrm{Pic}_K^0(C)$ сюръективно.

c) Всегда ли это верно, если $C(K)$ непусто и род C больше 1?

Задача 19 (закон взаимности Вейля). Пусть C — гладкая кривая и пусть $f, g \in \bar{K}(C)^\times$ — функции с непересекающимися дивизорами. Докажите закон взаимности Вейля

$$f(\mathrm{div}(g)) = g(\mathrm{div}(f)).$$

Подсказка: проверьте закон взаимности Вейля непосредственно для $C = \mathbb{P}^1$. Затем докажите закон взаимности для произвольной кривой C, используя отображение $g\colon C \to \mathbb{P}^1$.

Задача 20 (гиперэллиптические кривые). Всюду в этом упражнении мы предполагаем, что характеристика поля K не равна двум. Пусть $f(x) \in K[x]$ — многочлен степени $d \geq 1$ с ненулевым дискриминантом, C_0/K — аффинная кривая, задаваемая уравнением

$$C_0 : y^2 = f(x) = a_0 x^d + a_1 x^{d-1} + \ldots + a_{d-1}x + a_d,$$

и g — единственное целое число такое, что $d - 3 < 2g \leq d - 1$.

a) Покажите, что точка на бесконечности у C_0 является особой тогда и только тогда, когда $d \geq 4$.

b) Пусть $d = 4$. Рассмотрим отображение $\psi = [1, x, y, x^2]\colon C_0 \to \mathbb{P}^3$. Пусть C — кривая в $\mathbb{P}^3$, заданная уравнениями $x_2^2 - a_0x_3^2 - a_1x_1x_3 - a_2x_0x_3 - a_3x_0x_1 - a_4x_0^2 = x_3x_0 - x_1^2 = 0$. Убедитесь, что ψ задаёт изоморфизм $C_0 \cong C \cap \{x_0 \neq 0\}$. Покажите, что кривая C имеет две неособые точки на пересечении с плоскостью $x_0 = 0$.

c) Пусть C — замыкание образа C_0 при отображении

$$[1, x, x^2, \ldots, x^{g-1}, y]\colon C_0 \longrightarrow \mathbb{P}^{g+2}.$$

Докажите, что C гладкая и $C \cap \{x_0 \neq 0\}$ изоморфно C_0. Кривая C называется гиперэллиптической кривой.

d) Пусть

$$f^*(v) = v^{2g+2} f(1/v) = \begin{cases} a_0 + a_1 v + \ldots + a_{d-1}v^{d-1} + a_d v^d, & \text{если } d \text{ чётно}, \\ a_0 v + a_1 v^2 + \ldots + a_{d-1}v^d + a_d v^{d+1}, & \text{если } d \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Покажите, что C состоит из двух аффинных компонент

$$C_0 : y^2 = f(x) \quad \text{и} \quad C_1 : w^2 = f^*(v),$$

склеенных при помощи отображений

$$\begin{aligned} C_0 &\longrightarrow C_1, & C_1 &\longrightarrow C_0, \\ (x, y) &\longmapsto (1/x, y/x^{g+1}), & (v, w) &\longmapsto (1/v, w/v^{g+1}). \end{aligned}$$

e) Посчитайте дивизор дифференциала dx/y на C и используйте это, чтобы показать, что C имеет род g. Убедитесь в этом другим способом, применяя формулу Гурвица к отображению $[1, x]\colon C \to \mathbb{P}^1$.

f) Найдите базис пространства голоморфных дифференциалов на C.
Подсказка: рассмотрите множество дифференциальных форм $\{x^i dx/y \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$.