НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 12.
Лемма Сарда, трансверсальность, степень отображения. 12.12.2011.

Задача 1. Два подмногообразия (без края) K_1 и K_2 замкнутого (компактного, без края) многообразия M называются *бордантными,* если существует подмногообразие W многообразия M, край ∂W которого является объединением K_1 и K_2.

Пусть f гладкое отображение многообразия M^n в связное многообразие N^k, $n \geqslant k$, а y_1 и y_2 некритические значения отображения f.

Доказать, что подмногообразия $f^{-1}(y_1)$ и $f^{-1}(y_2)$ бордантны.

Задача 2. В ситуации предыдущей задачи пусть f_1 и f_2 гомотопные гладкие отображения M в N, y_1 и y_2 некритические значения f_1 и f_2 соответственно. Доказать, что подмногообразия $f_1^{-1}(y_1) \times \{1\}$ и $f_2^{-1}(y_2) \times \{-1\}$ многообразия $M \times \mathbb{S}^1$ бордантны.

Задача 3. Пусть f гладкая функция на пространстве $\mathbb{R}^n$. Доказать, что существует линейная функция ℓ на $\mathbb{R}^n$, такая что функция $f + \ell$ имеет только невырожденные критические точки.

Задача 4. Пусть M подмногообразие аффинного пространства $\mathbb{R}^N$. Доказать, что существует точка $P_0 \in \mathbb{R}^N$, для которой функция $r(x) = \rho(x, P_0)$ на многообразии M имеет только невырожденные критические точки.

Задача 5. Вычислить степень отображения F комплексного проективного n-мерного пространства в себя, определяемого формулой

$$F(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) = (z_0^m : z_1^m : \ldots : z_n^m).$$

Задача 6. Вычислить степень отображения F многообразия $\mathrm{SO}(n)$ в себя, задаваемого формулой $F(A) = A^m$, где $A \in \mathrm{SO}(n)$.

Задача 7. Пусть f комплексно аналитическое отображение компактного комплексного многообразия M^n в комплексно аналитическое многообразие N^n. Доказать, что степень отображения f неотрицательна.

Задача 8. Пусть $f : N \longrightarrow M$ гладкое отображение многообразий с краем одной размерности, при котором связный край ∂N переходит в связный край ∂M. Доказать, что $\deg f|_{\partial N} = \deg f$.

Задача 9. Доказать, что два гладких отображения $f, g : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ замкнутого n-мерного ориентированного многообразия M в n-мерную сферу гомотопны тогда и только тогда, когда $\deg f = \deg g$.

Задача 10. Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ отображение замкнутого n-мерного многообразия M в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что прообраз любого регулярного значения $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из чётного числа точек.