Жорданова нормальная форма и функции от матриц

В этом листке основное поле k — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.
Пусть A — оператор на вещественном или комплексном векторном пространстве. Определим его *экспоненту* как бесконечную сумму

$$\exp A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots.$$

A10.1. **а)** Докажите, что у любого оператора на конечномерном пространстве есть экспонента (т. е. соответствующая бесконечная сумма сходится).

б) Как связаны собственные значения оператора и его экспоненты?

A10.2. Найдите экспоненты следующих операторов:

а) $\frac{d}{dx}\colon k[x] \to k[x]$;

б) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{smallmatrix}\right) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

A10.3. Докажите, что $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$.

A10.4. Пусть характеристический многочлен $\chi_A(t)$ оператора A не имеет кратных корней.

а) Докажите, что если значения двух многочленов (с коэффициентами в основном поле) P и Q в корнях многочлена $\chi_A(t)$ совпадают, то $P(A) = Q(A)$.

б) Как, зная корни характеристического многочлена, свести вычисление экспоненты от оператора к вычислению некоторого многочлена от этого оператора?

A10.5. Пусть V — пространство последовательностей (f_i), удовлетворяющих линейной рекурренте $f_{n+k+1} = a_k f_{n+k} + \ldots + a_1 f_{n+1} + a_0 f_n$, и пусть $T\colon V \to V$ — оператор сдвига на 1, т. е. $(Tf)_n = f_{n+1}$.

а) Найдите характеристический многочлен оператора T.

б) Найдите собственные векторы оператора T. Когда они образуют базис?

в) Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис для оператора T и сформулируйте общий способ решения линейных рекуррент.

г*) Получите аналогичным образом общий способ решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.