Кольца вычетов

A1◇1. Составьте таблицы умножения для колец $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. В каждом из этих колец найдите все обратимые элементы, все квадраты, все делители нуля и все нильпотенты. Для обратимых элементов постройте таблицу обратных.

A1◇2. а) Найдите НОД(x, y), где x — число, составленное из первых пяти цифр вашего мобильного телефона (не считая восьмёрки), а y — из последних пяти цифр, и представьте НОД(x, y) в виде $ax + by$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

б) Найдите НОД многочленов $f = x^5 - 1$ и $g = x^4 + x^2 + 1$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$ и представьте его в виде $af + bg$, где $a, b \in \mathbb{Q}[x]$.

A1◇3. а) Пусть $a, b \in \mathbb{F}_p$ – ненулевые остатки по модулю p (где p — простое число). Докажите, что число различных элементов вида $a^k b$ не зависит от b и делит $p - 1$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что в $\mathbb{F}_p$ можно делить на ненулевые элементы.

б) Докажите *малую теорему Ферма*: $a^p = a \pmod p$ для всякого простого числа p и $a \in \mathbb{Z}$.

в) Найдите число различных раскрасок карусели с p кабинками в a цветов (каждую кабинку в один цвет), и еще раз докажите малую теорему Ферма.

A1◇4. а) Докажите, что многочлен степени m с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$ имеет в $\mathbb{F}_p$ не более m корней.

Указание. Многочлены с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$ можно делить с остатком.

б) Разложите многочлен $x^p - x$ с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$ в произведение линейных множителей.

Указание. Воспользуйтесь малой теоремой Ферма.

в) Докажите *теорему Вильсона*: натуральное число p просто тогда и только тогда, когда $(p - 1)! + 1$ делится на p.

A1◇5. Остаток $a \in \mathbb{F}_p$ называется *квадратичным вычетом*, если существует такой остаток $b \in \mathbb{F}_p$, что $b^2 = a$.

а) Сколько существует квадратичных вычетов по модулю p?

б) Докажите, что -1 не является квадратичным вычетом для $p = 4k + 3$.

в) Докажите, что -1 является квадратичным вычетом для $p = 4k + 1$.

г) Докажите, что простых чисел вида $p = 4k + 1$ бесконечно много.

A1◇6. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ сопоставляет натуральному числу n количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n (т.е. количество обратимых элементов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Найдите

а) $\varphi(p)$, где p — простое число;

б) $\varphi(p^k)$, где p — простое число, $k \in \mathbb{Z}$;

в) $\varphi(p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m})$, где p_i — различные простые числа.

г) Докажите *теорему Эйлера*: $a^{\varphi(n)} = 1 \pmod n$, если НОД$(a, n) = 1$.

A1◇7. *Функция Мебиуса* $\mu(n)$ равна $(-1)^k$, если n есть произведение k попарно различных простых чисел, и равна нулю для всех остальных натуральных чисел (в частности, $\mu(1) = 1, \mu(2) = \mu(3) = -1, \mu(6) = 1, \mu(4) = \mu(12) = 0$).

а) Докажите *формулу обращения Мебиуса*: если $b(n) = \sum\limits_{d|n} a(d)$, то $a(n) = \sum\limits_{d|n} b(d)\mu(\frac{n}{d})$.

б) Выразите $\varphi(n)$ в виде суммы по всем делителям числа n.

A1◇8. Сколько решений имеет уравнение $x^2 = 1$ в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, если **а)** n нечетно; **б)** n четно?

Евклидовы кольца

Кольцо $K[[x]]$ *формальных степенных рядов* над полем K состоит из (бесконечных) сумм вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, где $a_i \in K$. Кольцо $K((x))$ *формальных рядов Лорана* над полем K состоит из (бесконечных) сумм вида $a_{-N}x^{-N} + a_{-N+1}x^{-N+1} + a_{-N+2}x^{-N+2} + \ldots$, где $a_i \in K$, а N — произвольное натуральное число. Сложение и умножение в этих кольцах определяются так же, как и для многочленов (т.е., чтобы перемножить два ряда, надо раскрыть скобки, пользуясь соотношением $x^k x^l = x^{k+l}$).

А2◇1. а) Выразите явной формулой коэффициенты произведения двух степенных рядов через коэффициенты сомножителей. Убедитесь, что произведение определено корректно, то есть для нахождения каждого из этих коэффициентов необходимо проделать лишь *конечное* число операций сложения и умножения. Верно ли это для рядов Лорана?

б) Является ли кольцо $K[[x]]$ целостным?

в) Найдите все обратимые элементы в $K[[x]]$ и все идеалы в $K[[x]]$.

г) Покажите, что $K((x))$ является полем частных кольца $K[[x]]$.

Кольцо гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ состоит из комплексных чисел вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. *Нормой* гауссова числа $z = a + bi$ называется число $n(z) = a^2 + b^2$.

А2◇2. а) Докажите, что гауссовы числа действительно образуют кольцо, т.е. замкнуты относительно операций сложения и умножения комплексных чисел. **б)** Найдите поле частных кольца $\mathbb{Z}[i]$ (т.е. опишите это поле как подполе в $\mathbb{C}$). **в)** Докажите, что норма $n\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$ *мультипликативна*, т.е. $n(zw) = n(z)n(w)$ для любых гауссовых чисел $z, w \in \mathbb{Z}[i]$.

А2◇3. а) Найдите все обратимые гауссовы числа (т.е. такие $z \in \mathbb{Z}[i]$, для которых $z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$). Чему равняется их норма?

б) Разложите числа 2, 3 и 5 в произведение простых (т.е. не раскладывающихся в произведение необратимых множителей) гауссовых чисел.

А2◇4. а) Докажите, что для любых гауссовых чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ и $z_2 \neq 0$ существуют такие $r, q \in \mathbb{Z}[i]$, что $z_1 = r \cdot z_2 + q$ и $n(q) < n(z_2)$.

б) Докажите, что в кольце гауссовых чисел любой идеал главный.

в) **(Основная теорема арифметики для гауссовых чисел.)** Докажите, что любое гауссово число представляется в виде произведения простых единственным способом (с точностью до обратимых множителей).

А2◇5. Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ не выполняется основная теорема арифметики (а, следовательно, существуют неглавные идеалы и нет деления с остатком).

А2◇6. а) Докажите, что следующие условия эквивалентны: 1) целое простое число $p \in \mathbb{Z}$ является простым в кольце $\mathbb{Z}[i]$; 2) кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(x^2+1)$ является полем; 3) число p имеет вид $4k+3$;

б) Докажите, что следующие условия эквивалентны: 1) целое простое число $p \in \mathbb{Z}$ есть произведение двух различных простых элементов кольца $\mathbb{Z}[i]$, сопряженных друг другу; 2) кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(x^2+1)$ изоморфно $\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p$; 3) число p имеет вид $4k+1$;

в) Что происходит при $p = 2$?

А2◇7. а) Какие значения может принимать многочлен $x^2 + y^2$ при целых значениях переменных x, y ?

б) Найдите количество целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = n$ в зависимости от $n \in \mathbb{Z}$, зная разложение числа n на простые множители.

в) Пусть $\tau_1(n)$ – количество натуральных делителей числа n, имеющих вид $4k+1$, а $\tau_3(n)$ – количество натуральных делителей числа n, имеющих вид $4k+3$. Выразите количество целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = n$ через $\tau_1(n)$ и $\tau_3(n)$.

A2◇8*. а) Найдите все неприводимые многочлены степени не выше 3 над $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$.

б) Пусть $I_n(q)$ – количество неприводимых многочленов степени n над $\mathbb{F}_q$. Докажите равенство формальных степенных рядов: $(1-qx)^{-1} = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-I_n(q)}$.

в) Выразите $I_n(q)$ явной формулой в виде многочлена от q.

Указание. Возьмите логарифм от обеих частей равенства из предыдущего пункта и воспользуйтесь формулой обращения Мебиуса.

A2◇9*. а) Решите задачи A2.2–A2.4 для кольца *чисел Эйзенштейна*, состоящего из комплексных числа вида $a + b\rho \in \mathbb{C}$, где $\rho = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

б) Докажите, что целое простое число $p \in \mathbb{Z}$ является простым в кольце чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\rho]$ тогда и только тогда, когда кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(x^2+x+1)$ является полем.

в) Докажите, что из натуральных чисел простыми числами Эйзенштейна являются только простые вида $p = 6k-1$ и $p = 2$.

г) Найдите количество целочисленных решений уравнения $x^2 - xy + y^2 = n$ в зависимости от $n \in \mathbb{Z}$.

Несколько задач про многочлены

A3◇1. а) Покажите, что следующее подмножество поля $\mathbb{C}(x,y)$ является подполем:

$$\left\{ \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \middle| \ P,Q \text{ — однородные многочлены равной степени} \right\}.$$

б) Докажите, что это подполе изоморфно $\mathbb{C}(x)$.

A3◇2. а) При каких n многочлен x^n-2 неприводим над полем $\mathbb{Q}$?

б) Докажите *признак Эйзенштейна*: если все коэффициенты a_i многочлена $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ с целыми коэффициентами делятся на простое число p, причем a_0 не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$.

A3◇3. Докажите, что многочлен $x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$ неприводим над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда $n+1$ — простое число.

Указание. Полезно сделать замену $x \to x+1$.

A3◇4. Докажите, что главный идеал $(x^2-y) \subset \mathbb{C}[x,y]$ является простым, но не максимальным.

A3◇5. а) Покажите, что кольцо $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ не имеет делителей нуля.

б) Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ не изоморфно $\mathbb{C}[x]$, но его поле частных изоморфно $\mathbb{C}(x)$.

Указание. Синус и косинус рационально выражаются через тангенс половинного угла.

A3◇6. Докажите, что многочлен x^p-x+a неприводим над $\mathbb{F}_p$ при $a \neq 0$

Указание. Всё-таки полезно сделать замену $x \to x+1$.

Производящие функции

А4◇1. Найдите коэффициенты формального степенного ряда **а)** $\frac{1}{1-\alpha x}$; **б)** $\frac{1}{(1-\alpha x)^k}$.

Производящей функцией числовой последовательности $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется формальный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

А4◇2. Последовательность $\{u_n\}$ *чисел Фибоначчи* определяется следующим образом: $u_0 = u_1 = 1$ и $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

а) Докажите, что ряд $\frac{1}{1-x-x^2}$ является производящей функцией последовательности Фибоначчи, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$;

б) Разложив правую часть равенства из пункта (а) на простые дроби, найдите явную формулу для чисел Фибоначчи.

в) Найдите производящую функцию и явную формулу для последовательности $U_n := \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

А4◇3. *Логарифмической производной* формального степенного ряда $f(x)$ называется ряд Лорана $(\log f(x))' := \frac{f'(x)}{f(x)}$.

а) В каких случаях логарифмическая производная снова является степенным рядом?

б) Докажите, что $(\log f(x)g(x))' = (\log f(x))' + (\log g(x))'$.

А4◇4. **а)** Для каких последовательностей степенных рядов $f_n(x)$ корректно определена бесконечная сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$?

б) А когда корректно определено бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$?

в) Верно ли утверждение задачи А4.3 б) для бесконечных сумм и произведений?

г) Докажите, что $1 - x = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^n})^{-1}$.

А4◇5. *Числом разбиений* $P(n)$ натурального числа n называется количество различных представлений числа n в виде суммы положительных целых чисел. При этом порядок слагаемых не учитывается, то есть разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются равными.

а) Докажите, что $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(n)x^n = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1}$.

б) Докажите, что число разбиений числа n на нечетные слагаемые равно числу разбиений числа n на различные слагаемые.

Указание. Сравните производящие функции для этих последовательностей.

А4◇6*. *Число Каталана* C_n есть количество различных разбиений выпуклого $(n+2)$-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями.

а) Докажите, что производящая функция $C(x)$ последовательности C_n удовлетворяет квадратному уравнению $xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$;

б) Выразите C_n через биномиальные коэффициенты.

Указание. Решите квадратное уравнение в степенных рядах, пользуясь обычной формулой.

Векторные пространства

A5◇1. **а)** Докажите, что все геометрические прогрессии в пространстве последовательностей комплексных чисел, удовлетворяющих условию $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, образуют векторное пространство, и найдите его размерность.

б) Выберите из этих прогрессий базис и разложите по нему последовательность u_n чисел Фибоначчи.

в) При каких $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ в пространстве последовательностей комплексных чисел, удовлетворяющих условию $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta x_{n-2}$, существует базис из геометрических прогрессий?

A5◇2. Укажите какой-нибудь базис и найдите размерность пространства многочленов $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ степени не выше n, **а)** обращающихся в нуль в точках $t = 0, t = 1$ и $t = 5$;

б) таких, что $P(0) = P(1) = 2P(5)$.

A5◇3 (Интерполяционная формула Лагранжа.). Пусть V — пространство многочленов степени не выше n.

а) Проверьте, что для любой точки $p \in \mathbb{C}$, следующая формула задает линейный функционал δ_p на пространстве V: $\delta_p(f) = f(p)$.

б) Пусть $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{C}$ – попарно различные точки. Укажите многочлен степени не выше n, принимающий ненулевое значение ровно в одной из этих точек.

в) Докажите, что функционалы $\delta_{p_1}, \ldots, \delta_{p_{n+1}}$ образуют базис в пространстве V^*, и найдите двойственный базис в пространстве V.

г) Укажите многочлен степени не выше n, принимающий в данных точках $p_1, \ldots, p_{n+1}$ данные значения $a_1, \ldots, a_{n+1}$.

A5◇4. **а)** Сколько элементов в n-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{F}_p$?

б) Сколько там прямых (1-мерных подпространств)? **в)** упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов? **г)** k-мерных подпространств?

A5◇5. Докажите, что всякое отображение $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ задается многочленом степени не выше $p-1$.

Подпространства и отображения

А6◇1. Пусть V – векторное пространство, U, W — его подпространства. Постройте естественные (не использующие выбора координат) изоморфизмы

а) $U+V=(U\oplus W)/(U\cap W)$;

б) $(U+W)/U=W/(U\cap W)$;

в) $V/(U+W)=(V/U)/(W/(U\cap W))$.

А6◇2. Пусть V — векторное пространство, U_i — его подпространства. Верно ли, что

а) $\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim U_1\cap U_2$;

б) $\dim(U_1+U_2+U_3)=\dim U_1+\dim U_2+\dim U_3-\dim U_1\cap U_2-\dim U_2\cap U_3-\dim U_3\cap U_1+\dim U_1\cap U_2\cap U_3$?

А6◇3. Зафиксируем векторное пространство V.

а) Докажите, что любые два подпространства одинаковой размерности переводятся друг в друга автоморфизмом объемлющего пространства. Сформулируйте и докажите соответствующие утверждения для (упорядоченных) **б)** пар **в)** троек подпространств.

г*) Докажите, что (над бесконечным полем) существует бесконечно много неизоморфных наборов четверок прямых в двумерном пространстве (т.е. для четверок подпространств задача не имеет "дискретного" ответа).

А6◇4. Пусть A — такой оператор на векторном пространстве V, что $A^2=A$. Докажите, что V можно ровно одним способом представить в виде прямой суммы $U\oplus W$ так, что A — проектор на первое слагаемое.

А6◇5. Пусть $A\colon U\to W$ и $B\colon V\to U$ — линейные отображения. Докажите, что

а) $\mathrm{rk}\,(AB)\le\mathrm{rk}\,(A)$, $\mathrm{rk}\,(AB)\le\mathrm{rk}\,(B)$;

б) $|\mathrm{rk}\,(A)-\mathrm{rk}\,(B)|\le\mathrm{rk}\,(A+B)\le\mathrm{rk}\,(A)+\mathrm{rk}\,(B)$.

Грассмановы многочлены и определители

A7◇1. Пусть V — n-мерное пространство. Какую размерность имеет векторное пространство $\Lambda^k V$?

A7◇2. Пусть в трехмерном пространстве E выбран базис. Проверьте, что при естественном отождествлении $\Lambda^2 E$ с E внешнее произведение $\wedge\colon E \times E \to \Lambda^2 E$ превращается в обычное векторное произведение.

A7◇3. Пусть F — k-мерное подпространство n-мерного векторного пространства V.

а) Покажите, что элемент $[F] := f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_k \in \Lambda^k V$ не зависит, с точностью до ненулевого множителя, от выбора базиса (f_i) в F (“вложение Плюккера”).

б) Покажите, что $[F] \wedge [F] = 0$.

в) Пусть $k = 2$. Покажите, что всякий ненулевой элемент $\omega \in \Lambda^2 V$, удовлетворяющий соотношению $\omega \wedge \omega = 0$, получается из некоторой двумерной плоскости описанным образом.

Определение. *Минором* матрицы называется определитель какой-либо ее квадратной подматрицы. *Главным минором* квадратной матрицы называются минор m_{ij}, получающиеся при вычеркивании i-й строки и j-го столбца.

A7◇4. Найдите квадратичное соотношение, которому удовлетворяют 2×2-миноры любой матрицы 2×4 (“соотношение Плюккера”).

Определение. Пусть A — квадратная матрица. Ее *присоединенной* матрицей называется матрица $\widehat{A}$, у которой на месте (i, j) стоит число $(-1)^{i+j} m_{ji}$.

A7◇5. а) Докажите, что $A \cdot \widehat{A} = \det A \cdot E$.

Указание. Как выглядит матрица действия A на $\Lambda^{n-1} V$?

б) Докажите, что матрица с элементами из произвольного кольца обратима тогда и только тогда, когда ее определитель обратим.

A7◇6. а) Докажите, что набор целочисленных векторов порождает решетку $\mathbb{Z}^n$ тогда и только тогда, когда натянутый на них параллелепипед имеет единичный объем.

б*) Докажите, что если параллелепипед с вершинами в узлах решетки $\mathbb{Z}^n$ не содержит других узлов решетки, то он имеет единичный объем.

в*) Пусть внутри многоугольника с вершинами в узлах решетки лежит n узлов сетки, а на его границе — b узлов. Докажите, что тогда его площадь может быть найдена по *формуле Пика*: $S = n + \frac{b}{2} - 1$.

Вычисление определителей

A8◇1. Найдите определитель $n \times n$-матрицы (a_{ij}), где
а) $a_{ij} = ij$; **б)** $a_{ij} = i + j$; **в)** $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$; **г*)** $a_{ij} =$НОД(i, j).

A8◇2. *Континуантой* $(a_1 a_2 \dots a_n)$ называется следующий определитель $n \times n$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{pmatrix}.$$

а) Выразите $(a_1 a_2 \dots a_n)$ в виде многочлена от $a_1, a_2, \dots a_n$.
б) Напишите разложение континуанты по первым k строкам.
в) Докажите, что

$$\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

A8◇3. *Матрицей Вандермонда* называется следующая матрица $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

а) Найдите определитель этой матрицы.
Указание. Выясните, при каких значениях переменных определитель обращается в нуль.
б) Найдите обратную к матрице Вандермонда.

A8◇4 (Формула Ньютона). Пусть e_k — k-я элементарная симметрическая функция от переменных $x_1, \dots, x_n$, а $s_k := x_1^k + \dots + x_n^k$ — k-я степенная сумма.
а) Докажите, что s_k равняется определителю

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (k-1)e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & \dots & e_1 & 1 \\ ke_k & e_{k-1} & e_{k-2} & \dots & e_2 & e_1 \end{pmatrix}.$$

б) Докажите, что $k!e_k$ равняется определителю

$$\det \begin{pmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & e_{k-3} & \dots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_2 & s_1 \end{pmatrix}.$$

A8◇5. а) Линейный оператор A в конечномерном пространстве над полем характеристики 0 таков, что $\operatorname{Tr} A^n = 0$ для любого натурального n. Докажите, что оператор A нильпотентен.
Указание. Воспользуйтесь теоремой Гамильтона–Кэли.
б) Верно ли это над полем положительной характеристики?

Абелевы группы

A9◇1. Вычислите **а)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; **б)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$; **в)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

A9◇2. **а)** При каких m и n группы $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ изоморфны?

б) Какие из следующих групп изоморфны: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$?

A9◇3. Есть ли в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

A9◇4. Абелева группа A содержит в качестве подгруппы $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$, а факторгруппа изоморфна $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ (числа p и q простые). Чему может быть изоморфна группа A?

A9◇5. Пусть $A = \mathbb{Z}^n$, $F\colon A \to A$. Докажите, что:

а) группа $A/\operatorname{Im} F$ конечна тогда и только тогда, когда $\det F \neq 0$.

б) Порядок этой группы равен $|\det F|$.

A9◇6. Пусть $d_A(n)$ — количество элементов, аннулируемых умножением на n, в абелевой группе A.

а) Докажите, что если группа A конечна и при этом $d_A(n) \leqslant n$, то A циклическая.

б*) Пусть $d_A = d_B$ для конечных абелевых групп A и B. Верно ли, что группы A и B изоморфны?

A9◇7.

а) Пусть $K^\times$ — группа ненулевых элементов поля K (по умножению). Может ли она содержать конечную нециклическую подгруппу?

б) Верно ли, что мультипликативная группа конечного поля всегда циклична?

A9◇8*. Разложите группу обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, где m произвольно, в прямую сумму циклических.

Жорданова нормальная форма и функции от матриц

В этом листке основное поле k — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.
Пусть A — оператор на вещественном или комплексном векторном пространстве. Определим его *экспоненту* как бесконечную сумму

$$\exp A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots .$$

A10◇1. а) Докажите, что у любого оператора на конечномерном пространстве есть экспонента (т. е. соответствующая бесконечная сумма сходится).

б) Как связаны собственные значения оператора и его экспоненты?

A10◇2. Найдите экспоненты следующих операторов:

а) $\frac{d}{dx}\colon k[x] \to k[x]$;

б) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{smallmatrix}\right) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

A10◇3. Докажите, что $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$.

A10◇4. Пусть характеристический многочлен $\chi_A(t)$ оператора A не имеет кратных корней.

а) Докажите, что если значения двух многочленов (с коэффициентами в основном поле) P и Q в корнях многочлена $\chi_A(t)$ совпадают, то $P(A) = Q(A)$.

б) Как, зная корни характеристического многочлена, свести вычисление экспоненты от оператора к вычислению некоторого многочлена от этого оператора?

A10◇5. Пусть V — пространство последовательностей (f_i), удовлетворяющих линейной рекурренте $f_{n+k+1} = a_k f_{n+k} + \ldots + a_1 f_{n+1} + a_0 f_n$, и пусть $T\colon V \to V$ — оператор сдвига на 1, т. е. $(Tf)_n = f_{n+1}$.

а) Найдите характеристический многочлен оператора T.

б) Найдите собственные векторы оператора T. Когда они образуют базис?

в) Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис для оператора T и сформулируйте общий способ решения линейных рекуррент.

г*) Получите аналогичным образом общий способ решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.