Грассмановы многочлены и определители

A7.1. Пусть V — n-мерное пространство. Какую размерность имеет векторное пространство $\Lambda^k V$?

A7.2. Пусть в трехмерном пространстве E выбран базис. Проверьте, что при естественном отождествлении $\Lambda^2 E$ с E внешнее произведение $\wedge\colon E \times E \to \Lambda^2 E$ превращается в обычное векторное произведение.

A7.3. Пусть F — k-мерное подпространство n-мерного векторного пространства V.

а) Покажите, что элемент $[F] := f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_k \in \Lambda^k V$ не зависит, с точностью до ненулевого множителя, от выбора базиса (f_i) в F (“вложение Плюккера”).

б) Покажите, что $[F] \wedge [F] = 0$.

в) Пусть $k = 2$. Покажите, что всякий ненулевой элемент $\omega \in \Lambda^2 V$, удовлетворяющий соотношению $\omega \wedge \omega = 0$, получается из некоторой двумерной плоскости описанным образом.

Определение. *Минором* матрицы называется определитель какой-либо ее квадратной подматрицы. *Главным минором* квадратной матрицы называются минор m_{ij}, получающиеся при вычеркивании i-й строки и j-го столбца.

A7.4. Найдите квадратичное соотношение, которому удовлетворяют 2×2-миноры любой матрицы 2×4 (“соотношение Плюккера”).

Определение. Пусть A — квадратная матрица. Ее *присоединенной* матрицей называется матрица $\widehat{A}$, у которой на месте (i, j) стоит число $(-1)^{i+j} m_{ji}$.

A7.5. **а)** Докажите, что $A \cdot \widehat{A} = \det A \cdot E$.

Указание. Как выглядит матрица действия A на $\Lambda^{n-1} V$?

б) Докажите, что матрица с элементами из произвольного кольца обратима тогда и только тогда, когда ее определитель обратим.

A7.6. **а)** Докажите, что набор целочисленных векторов порождает решетку $\mathbb{Z}^n$ тогда и только тогда, когда натянутый на них параллелепипед имеет единичный объем.

б*) Докажите, что если параллелепипед с вершинами в узлах решетки $\mathbb{Z}^n$ не содержит других узлов решетки, то он имеет единичный объем.

в*) Пусть внутри многоугольника с вершинами в узлах решетки лежит n узлов сетки, а на его границе — b узлов. Докажите, что тогда его площадь может быть найдена по *формуле Пика*: $S = n + \frac{b}{2} - 1$.