Подпространства и отображения

A6.1. Пусть V – векторное пространство, U, W — его подпространства. Постройте естественные (не использующие выбора координат) изоморфизмы

а) $U + V = (U \oplus W)/(U \cap W)$;

б) $(U + W)/U = W/(U \cap W)$;

в) $V/(U + W) = (V/U)/(W/(U \cap W))$.

A6.2. Пусть V — векторное пространство, U_i — его подпространства. Верно ли, что

а) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2$;

б) $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 - \dim U_1 \cap U_2 - \dim U_2 \cap U_3 - \dim U_3 \cap U_1 + \dim U_1 \cap U_2 \cap U_3$?

A6.3. Зафиксируем векторное пространство V.

а) Докажите, что любые два подпространства одинаковой размерности переводятся друг в друга автоморфизмом объемлющего пространства. Сформулируйте и докажите соответствующие утверждения для (упорядоченных) **б)** пар **в)** троек подпространств.

г*) Докажите, что (над бесконечным полем) существует бесконечно много неизоморфных наборов четверок прямых в двумерном пространстве (т.е. для четверок подпространств задача не имеет “дискретного” ответа).

A6.4. Пусть A — такой оператор на векторном пространстве V, что $A^2 = A$. Докажите, что V можно ровно одним способом представить в виде прямой суммы $U \oplus W$ так, что A — проектор на первое слагаемое.

A6.5. Пусть $A\colon U \to W$ и $B\colon V \to U$ — линейные отображения. Докажите, что

а) $\mathrm{rk}\,(AB) \le \mathrm{rk}\,(A)$, $\mathrm{rk}\,(AB) \le \mathrm{rk}\,(B)$;

б) $|\mathrm{rk}\,(A) - \mathrm{rk}\,(B)| \le \mathrm{rk}\,(A + B) \le \mathrm{rk}\,(A) + \mathrm{rk}\,(B)$.