Производящие функции

А4.1. Найдите коэффициенты формального степенного ряда **а)** $\frac{1}{1-\alpha x}$; **б)** $\frac{1}{(1-\alpha x)^k}$.

Производящей функцией числовой последовательности $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется формальный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

А4.2. Последовательность $\{u_n\}$ *чисел Фибоначчи* определяется следующим образом: $u_0 = u_1 = 1$ и $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

а) Докажите, что ряд $\frac{1}{1-x-x^2}$ является производящей функцией последовательности Фибоначчи, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$;

б) Разложив правую часть равенства из пункта (а) на простые дроби, найдите явную формулу для чисел Фибоначчи.

в) Найдите производящую функцию и явную формулу для последовательности $U_n := \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

А4.3. *Логарифмической производной* формального степенного ряда $f(x)$ называется ряд Лорана $(\log f(x))' := \frac{f'(x)}{f(x)}$.

а) В каких случаях логарифмическая производная снова является степенным рядом?

б) Докажите, что $(\log f(x)g(x))' = (\log f(x))' + (\log g(x))'$.

А4.4. а) Для каких последовательностей степенных рядов $f_n(x)$ корректно определена бесконечная сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$?

б) А когда корректно определено бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$?

в) Верно ли утверждение задачи А4.3 б) для бесконечных сумм и произведений?

г) Докажите, что $1 - x = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^n})^{-1}$.

А4.5. *Числом разбиений* $P(n)$ натурального числа n называется количество различных представлений числа n в виде суммы положительных целых чисел. При этом порядок слагаемых не учитывается, то есть разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются равными.

а) Докажите, что $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(n)x^n = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1}$.

б) Докажите, что число разбиений числа n на нечетные слагаемые равно числу разбиений числа n на различные слагаемые.

Указание. Сравните производящие функции для этих последовательностей.

А4.6*. *Число Каталана* C_n есть количество различных разбиений выпуклого $(n+2)$-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями.

а) Докажите, что производящая функция $C(x)$ последовательности C_n удовлетворяет квадратному уравнению $xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$;

б) Выразите C_n через биномиальные коэффициенты.

Указание. Решите квадратное уравнение в степенных рядах, пользуясь обычной формулой.