Несколько задач про многочлены

А3.1. а) Покажите, что следующее подмножество поля $\mathbb{C}(x, y)$ является подполем:

$$\left\{ \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \mid P, Q \text{ — однородные многочлены равной степени} \right\}.$$

б) Докажите, что это подполе изоморфно $\mathbb{C}(x)$.

А3.2. а) При каких n многочлен $x^n - 2$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$?

б) Докажите *признак Эйзенштейна*: если все коэффициенты a_i многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами делятся на простое число p, причем a_0 не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$.

А3.3. Докажите, что многочлен $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда $n + 1$ — простое число.

Указание. Полезно сделать замену $x \to x + 1$.

А3.4. Докажите, что главный идеал $(x^2 - y) \subset \mathbb{C}[x, y]$ является простым, но не максимальным.

А3.5. а) Покажите, что кольцо $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ не имеет делителей нуля.

б) Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ не изоморфно $\mathbb{C}[x]$, но его поле частных изоморфно $\mathbb{C}(x)$.

Указание. Синус и косинус рационально выражаются через тангенс половинного угла.

А3.6. Докажите, что многочлен $x^p - x + a$ неприводим над $\mathbb{F}_p$ при $a \neq 0$

Указание. Всё-таки полезно сделать замену $x \to x + 1$.