НМУ, теория Морса.
Экзамен. 29.12.2010.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо <u>*не позднее*</u>*, чем 23 января, положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вахте внизу в конверте с моим именем.*

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Докажите, что любая гладкая функция $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ всегда имеет чётное число критических точек, если они все невырождены. *(5 баллов).*

Задача 2. Пусть $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ стандартная n-мерная сфера единичного радиуса с центром в нуле, а A симметрическая вещественная $(n+1)\times(n+1)$-матрица. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, определённую формулой $f_A(x) = \frac{1}{2}(Ax, x)$. Описать такие матрицы A, что f_A — функция Морса, для таких матриц найти критические точки, их индексы и критические значения. Вычислить многочлен Морса $P_{f_A}(t)$. *(10 баллов).*

Задача 3. На любом ли компактном многообразии существует совершенная функция Морса, то есть такая, что количество критических точек индекса k равно k-му числу Бетти? *(Подсказка: подумайте об $\mathbb{RP}^3$). (10 баллов).*

Задача 4. Возьмём стандартную единичную двумерную сферу и немного «вомнём» внутрь южный полюс так, чтобы получившаяся поверхность M оставалась гладкой поверхностью вращения относительно оси Oz. Рассмотрим функцию $f(x, y, z) = z$. Доказать, что это функция Морса-Ботта. Найти критические подмногообразия и их индекс. Найти многочлен Морса-Ботта $P_f(t)$. Верно ли, что эта функция f — совершенная функция Морса-Ботта? Если нет, найдите такой многочлен $Q(t)$ с неотрицательными коэффициентами, что $P_f(t) = P_M(t) + (1 + t)Q(t)$. *(10 баллов).*

Задача 5. На лекции мы разбирали пример тора, «лежащего» на плоскости Oxy и видели, что функция $f(x, y, z) = z$ является совершенной функцией Морса-Ботта, и объяснили почему. Придумайте другой пример многообразия и нетривиальной (хотя бы одно критическое подмногообразие должно быть положительной размерности) совершенной функции Морса-Ботта, и объясните почему она совершенна. *(20 баллов).*

Задача 6. Пусть R_g обозначает стандартное правое действия группы Ли на себе, $R_g(h) = hg$. Рассмотрим индуцированное правое действие $\mathrm{SO}(3)$ на своём кокасательном расслоении

$$T^*\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \ni ((\varphi, h), g) \mapsto (R^*_{g^{-1}}\varphi, R_g(h)).$$

Доказать, что это действие гамильтоново для стандартной симплектической структуры на $T^*\mathrm{SO}(3)$ и найти его отображение момента

$$\mu : T^*\mathrm{SO}(3) \longrightarrow \mathfrak{so}(3).$$

(10 баллов).

Задача 7*. На лекции мы рассматривали эффективное гамильтоново действие двумерного тора $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ на $\mathbb{C}P^2$. Что вы можете сказать о топологии $\mathbb{C}P^2$, используя функцию Морса-Ботта вида ξ_X, где $X \in \mathfrak{t}$? *(до 20 баллов).*