1. Пусть G локально-компактная группа и μ левая инвариантная борелевская мера на G. (Здесь *нет* предположений о регулярности меры.) Покажите, что следующие условия эквивалентны:

   a) $\mu(K) < \infty$ для всех компактных подмножеств K группы G,

   b) $\mu(U_0) < \infty$ для некоторого непустого открытого подмножеств U_0 группы G.

   Поэтому в определении левой мере Хаара, вместо требования, что все компактные подмножества имеют конечную меру, эквивалентно требовать, что некоторое непустое открытое подмножество имеет конечную меру.

2. Для всякого числового поля K, покажите, что $\mathbf{A}_K$ и J_K σ-компактны: каждое можно выражать как счетное объеденение компактных подмножеств.

3. Пусть $\mu_{p^\infty} = \{z \in \mathbf{C} : z^{p^n} = 1$ для некоторого $n\}$, но мы используем на ней *дискретную* топологию, которая не совпадает с обычной топологией как подмножество $\mathbf{C}$. Докажите, что $\widehat{\mu_{p^\infty}} \cong \mathbf{Z}_p$ как топологические группы, используя явный изоморфизм. (Не используете теорему двойственности Понтрягина!!).

4. a) В группе $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, покажите, что подгруппа элементов порядка p-степени изоморфна $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ явным изоморфизмом. (Здесь нет топологии.)

   b) Функция $r \mapsto e^{2\pi i r}$ индуцирует изоморфизм группы $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ на группу μ всех корней из единицы в $\mathbf{C}$ как абстрактные группы. Этот изоморфизм и часть a нам дают изоморфизм $f\colon \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \to \mu_{p^\infty}$ как абстрактные группы.[1] Покажите, что композиция

$$\mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \xrightarrow{\ f\ } \mu_{p^\infty} \hookrightarrow S^1$$

   совпадают со страндартном характером $x \mapsto e^{2\pi i \{x\}_p}$ на $\mathbf{Q}_p$.

[1] Так как фактортопология на $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ дискретна, $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ – правильная модель группы μ_{p^∞} как дискретная топологическая группа.

5. Пусть F конечное расширение $\mathbf{Q}_p$.

   a) Используете $\mathbf{Q}_p$-базис поля F для того, чтобы показать, что какой-то изоморфизм топологических групп $\widehat{\mathbf{Q}_p} \cong \mathbf{Q}_p$ влечет за собой $\widehat{F} \cong F$ как топологические группы. Это показывает, что F – самодвойственная группа, без использования «естественного» изоморфизма.

   b) Для каждого $y \in F$, определите $\chi_y \colon F \to S^1$ по формуле $\chi_y(x) = e^{2\pi i\{\mathrm{Tr}_{F/\mathbf{Q}_p}(xy)\}_p}$. Покажите, что $y \mapsto \chi_y$ изоморфизм топологических групп $F \cong \widehat{F}$, используя часть a. Здесь мы описываем «естественную» самодвойственность группы F.

   (Указание: На всяком сепарабельном расширении полей L/K, каждое K-линейное отображение $L \to K$ имеет вид $x \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$ для единственного $y \in L$.)

   c) Пусть $F = \mathbf{Q}_3(\sqrt{6})$ и $\chi(a + b\sqrt{6}) = e^{2\pi i\{a\}_3} e^{-2\pi i\{5b\}_3}$. Для какого явного числа $y \in F$ выполняется $\chi(x) = e^{2\pi i\{\mathrm{Tr}_{F/\mathbf{Q}_3}(xy)\}_3}$ для всех $x \in F$?