

Комплексные многообразия 8: когомологии Дольбо

Задача 8.1. Докажите, что группа i -х когомологий, $i > 0$, пучка замкнутых $(1, 1)$ -форм изоморфна $H^{i-1}(\mathcal{C}_M) \oplus \overline{H^{i-1}(\mathcal{C}_M)}$, где $\overline{H^{i-1}(\mathcal{C}_M)}$ обозначает комплексное сопряжение.

Задача 8.2. Докажите, что на римановом многообразии лапласиан $C^\infty M \xrightarrow{\Delta} C^\infty M$ задает сюръективное отображение пучков. Вычислите группу i -х когомологий, $i > 0$, пучка гармонич-ных функций.

Задача 8.3. Пучок \mathcal{F} на M называется **мягким**, если для каждого замкнутого подмножества $Z \subset M$, и каждого ростка $v \in \mathcal{F}|_Z$ над Z , v продолжается до глобального сечения. Докажите, что на компактном многообразии, любой мягкий пучок – тонкий, и наоборот.

Задача 8.4. Векторное поле v на симплектическом многообразии (M, ω) называется **гамильтоновым**, если $\text{Lie}_v \omega = 0$. Докажите, что для $i \geq 1$, имеет место изоморфизм $H^i(\text{Ham}) \cong H^{i+1}(M)$ где $\text{Ham } M$ обозначает пучок гамильтоновых векторных полей.

Задача 8.5. Докажите, что на одномерном комплексном многообразии вторые когомологии пучка мероморфных функций (по сложению) равны нулю.

Задача 8.6. Пучок \mathcal{F} на M называется **вялым**, если отображение ограничения

$$\Gamma_M(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_U(\mathcal{F})$$

сюръективно для каждого открытого U . Докажите, что любой пучок вкладывается в вялый пучок.