Комплексные многообразия,

лекция 8

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

15 ноября 2010

Лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Полидиск** D^n есть произведение дисков $D \subset \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА: **(Лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика)**
Пусть $\eta \in \Lambda^{0,p}(D^n)$ – $\overline{\partial}$-замкнутая форма на полидиске, гладко продолжающаяся в окрестность $D^n \subset \mathbb{C}^n$, и $p > 0$. Тогда η $\overline{\partial}$-точна.

ЗАМЕЧАНИЕ: В прошлой лекции, мы доказали, что для любой $(0,1)$-формы η с компактным носителем на $\mathbb{C}$, $\eta = \overline{\partial}\alpha$**, где** $\alpha \in C^\infty\mathbb{C}$ **гладкая функция** (не обязательно с компактным носителем, но убывающая как $1/|z|$).

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этого следует **лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика для** $n = 1$**.** Действительно, любая форма η на диске, продолжающаяся в окрестность $D \subset \mathbb{C}$, продолжается до формы на $\mathbb{C}$ с компактным носителем, значит, **лежит в образе** $\overline{\partial}$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Воспользовавшись разложением $\Lambda^{p,q}(D^n) \cong \Lambda^{p,0}(D^n) \otimes \Lambda^{0,q}(D^n)$, каждую форму можно представить в виде суммы вида $\sum \alpha_i^{0,q} \wedge P_i^{p,0}$, где P_i – полиномы от координатных ковекторов dz_i с постоянными коэффициентами. Поскольку $\overline{\partial}(\alpha_i^{0,q} \wedge P_i^{p,0}) = \overline{\partial}(\alpha_i^{0,q}) \wedge P_i^{p,0}$, **лемму Пуанкаре-Дольбо-Гротендика достаточно доказывать для** $(0,q)$**-форм.**

Доказательство леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика

Шаг 1: Пусть $\overline{\partial}_i : \Lambda^{0,q}(D^n) \longrightarrow \Lambda^{0,q+1}(D^n)$ есть оператор $\alpha \longrightarrow d\overline{z}_i \wedge \frac{d}{d\overline{z}_i}\alpha$, где z_i есть i-я координата на D^n. **Тогда $\overline{\partial} = \sum_i \overline{\partial}_i$.**

Шаг 2: В силу леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика для $n = 1$, когомологии $\overline{\partial}_i$ равны нулю. Обозначим за γ_i соответствующий оператор P_ξ, построенный в прошлой лекции. Если $\alpha = d\overline{z}_i \wedge \beta$, то $\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}(\alpha) = \alpha$, если в разложении α нет членов с $d\overline{z}_i$, то $\overline{\partial}_i\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}(\alpha) = 0$. Из этого следует, что $\operatorname{im}\left[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \operatorname{Id}\right]$ **лежит в пространстве R_i форм, в разложении которых нет $d\overline{z}_i$, а все коэффициенты голоморфны по z_i.**

Шаг 3: Свойства γ_i:
1. $\operatorname{im}\left[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \operatorname{Id}\right] \subset R_i$. **2.** $\{\overline{\partial}_i, \gamma_j\} = 0$, **если** $i \neq j$. **3.** $\left[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}\right]\Big|_{R_i} = 0$. **4.** $\gamma_i(R_j) \subset R_j$, $\overline{\partial}_i(R_j) \subset R_j$ **для** $i \neq j$.
Свойство 1 доказано в шаге 2, 3 следует из того, что на формах α без $d\overline{z}_i$ в разложении имеем $\{\gamma_i, \overline{\partial}\}(\alpha) = \gamma_i(\overline{\partial}_i(\alpha))$. Свойства 2 и 4 следуют из явной формулы для γ_i.

Шаг 4: В силу свойств 1, 3 и 4,

$$\left[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \operatorname{Id}\right](R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}) \subset R_i \cap R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}$$

для $i \neq i_1, i_2, ..., i_k$, и $\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}\Big|_{R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}} = 0$ в противном случае.

Доказательство леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика (2)

Шаг 4: $\left[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \mathrm{Id}\right](R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}) \subset R_i \cap R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}$ **для** $i \neq i_1, i_2, ..., i_k$**, и** $\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}\Big|_{R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}} = 0$ **в противном случае.**

Шаг 5: Пусть $\gamma := \sum_i \gamma_i$. Поскольку $\{\overline{\partial}_i, \gamma_j\} = 0$ при $i \neq j$, шаг 4 дает

$$\left[\{\overline{\partial}, \gamma\} - (n-k)\,\mathrm{Id}\right](R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}) \subset \sum_{i \neq i_1, i_2, ..., i_k} R_i \cap R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}$$

Шаг 6: Пусть W_0 есть пространство $(0,q)$-форм на D^n, допускающих продолжение в некоторую окрестность D^n, а $W_k \subset W_{k-1} \subset ...$ – подпространство, порожденное всеми $R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}$ для $i_1 < i_2 < ... < i_k$. В силу предыдущего шага, $\left[\{\overline{\partial}, \gamma\} - (n-k)\,\mathrm{Id}\right]\Big|_{W_k} \subset W_{k+1}$.

Шаг 7: Легко видеть, что W_0 состоит из голоморфных функций, которые являются $(0,p)$-формами, то есть пусто в силу $p > 0$. **Воспользовавшись индукцией, можно считать, что каждая $\overline{\partial}$-замкнутая форма в W_{k+1} $\overline{\partial}$-точна.** Пусть $\alpha \in W_k$ $\overline{\partial}$-замкнута. Тогда $(n-k)\alpha - \{\overline{\partial}, \gamma\}(\alpha) = (n-k)\alpha - \overline{\partial}\gamma(\alpha)$ лежит в W_{k+1}, то есть точна. **Получаем $(n-k)\alpha - \overline{\partial}\gamma(\alpha) = \overline{\partial}\eta$.**

■

Пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок** $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве M – это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_{U,U'}} \mathcal{F}(U')$ для каждого $U' \subset U$, и следующими свойствами

(1) **Композиция ограничений – снова ограничение:** если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а φ_{U_1,U_2}, φ_{U_2,U_3} соответствующие отображения ограничений, то $\varphi_{U_1,U_2} \circ \varphi_{U_2,U_3} = \varphi_{U_1,U_3}$.

(2) Если $U = \bigcup U_i$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(3) ("склейка сечений") Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию $f_i\big|_{U_i \cap U_j} = f_j\big|_{U_i \cap U_j}$, для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.**

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над U**, оно также обозначается $\mathcal{F}|_U$.

Паракомпактные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Покрытие** топологического пространства M есть набор открытых множеств $\{U_i\}$ такой, что $\bigcup U_i = M$. **Измельчение** покрытия $\{U_i\}$ есть покрытие $\{V_i\}$, такое, что каждый V_i содержится в каком-то из U_i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство M называется **паракомпактным**, если любое покрытие M допускает локально конечное измельчение.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любое паракомпактное многообразие M обладает следующим свойством. Каждое покрытие M допускает пару конечных измельчений $\{U_i\}$, и $\{V_i\}$ пронумерованных тем же набором индексов, причем все замыкания $\overline{U}_i$ компактны и содержатся в V_i.

ЗАМЕЧАНИЕ: **В дальнейшем все многообразия предполагаются паракомпактными.**

Носитель сечения пучка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Носитель сечения f пучка есть дополнение к объединению всех открытых множеств $U \subset M$ таких, что $f|_U = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f \in \mathcal{F}|_U$ – сечение пучка на многообразии $M \ni U$, причем носитель сечения f замкнут в M. **Тогда f принадлежит образу отображения ограничения $\Gamma_M(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_U(\mathcal{F})$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим покрытие $\{U_1 := U, U_2 := M \backslash K\}$, и пусть $f_1 \in \Gamma_{U_1}(\mathcal{F}) = f$, а $f_2 \in \Gamma_{U_2}(\mathcal{F}) = 0$. Тогда $f_i\Big|_{U_1 \cap U_2} = 0$, склеив их, обретем искомое. ■

Разбиение единицы на пучке

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\{U_i\}$, $\{V_i\}$ – пара локально конечных покрытий M, пронумерованных тем же набором индексов, причем для любого i замыкание V_i компактно, а замыкание U_i компактно и содержится в V_i. Обозначим за $F^c|_U$ группу сечений с компактным носителем над U. **Разбиение единицы** для пучка F есть такой набор гомоморфизмов $\psi_i: F|_{V\,i} \longrightarrow F^c|_{V\,i}$, и $\varphi_i: F|_{V\,i} \longrightarrow F^c|_{V\,i}$, что

(i) $\sum_i \psi_i(f) = f$ **для любого сечения** f

(ii) ψ_i **обратимо на** U_i**:** $\varphi_i(\psi_i(f))\Big|_{U_i} = f\Big|_{U_i}$

Пучок называется **тонким**, если он допускает разбиение единицы для любой пары таких покрытий.

ЗАМЕЧАНИЕ: Все пучки модулей над $C^\infty(M)$ и $C^i(M)$ – тонкие.

Ростки пучка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Росток пучка $\mathcal{F}$ в замкнутом множестве $Z \subset M$ есть класс эквивалентности сечений $\mathcal{F}$ в окрестностях Z, по следующему отношению эквивалентности. Сечения $f \in \mathcal{F}|_U$ и $f' \in \mathcal{F}|_{U'}$ эквивалентны, если $f|_U = f'|_U$ для окрестности Z, $U \subset U_1 \cap U_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если $\mathcal{F}$ – тонкий пучок, а $x \subset M$ – точка то **естественное отображение $\Gamma_M(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F})$ в соответствующее пространство ростков сюрьективно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: : Возьмем росток f, определенный в $U \ni x$, ограничим его на $V_i \supset U_i \ni x$ в покрытии, связанном с разбиением единицы, тогда $\varphi_i(\psi_i(f))|_{U_i} = f|_{U_i}$. Значит, $f' := \varphi_i(\psi_i(f))$ **имеет тот же росток.** Это сечение продолжается до сечения $\Gamma_M(\mathcal{F})$, потому что у него компактный носитель.■

Ацикличные пучки

ЗАМЕЧАНИЕ: **$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ является точной последовательностью пучков $\Leftrightarrow$ соответствующие последовательности ростков точные для каждого $x \in M$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функтор Φ из категории пучков в векторные пространства называется **точным слева** если любая точная последовательность пучков $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ переводится в точную слева последовательность $0 \longrightarrow \Phi(A) \longrightarrow \Phi(B) \longrightarrow \Phi(C)$.

ПРИМЕР: **Функтор глобальных сечений $\mathcal{F} \longrightarrow \Gamma_M(\mathcal{F})$ точен слева.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок A называется **ацикличным** , если для любого $U \subset M$ и точной последовательности пучков $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, последовательность $0 \longrightarrow \Gamma_U(A) \longrightarrow \Gamma_U(B) \longrightarrow \Gamma_U(C) \longrightarrow 0$ точна.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Любой тонкий пучок ацикличен.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $0 \longrightarrow F \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow ...$ – точная последовательность пучков, которые ацикличны, начиная с F_1. Такая последовательность называется **ацикличной резольвентой** F.

Когомологии пучков

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика, $\Omega^p(M) \hookrightarrow \Lambda^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \Lambda^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \Lambda^{p,2}(M) \xrightarrow{\bar\partial} ...$ **– ацикличная резольвента пучка голоморфных дифференциальных форм.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $F \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow ...$ – ацикличная резольвента. **Группа когомологий** $H^i(F)$ определяется как i-я группа когомологий соответствующего комплекса глобальных сечений,

$$\Gamma_M(F) \longrightarrow \Gamma_M(F_1) \longrightarrow \Gamma_M(F_2) \longrightarrow ...$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: **(Свойства когомологий)**:

1. Группы $H^i(F)$ **не зависят от выбора ацикличной резольвенты.**

2. $H^i(F) = 0$ **для всех** $i > 0$ **тогда и только тогда, когда** F **ацикличен.**

3. Для любой точной последовательности пучков $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ имеет место **длинная точная последовательность**

$$0 \longrightarrow H^0(A) \longrightarrow H^0(B) \longrightarrow H^0(C) \longrightarrow H^1(A) \longrightarrow H^1(B) \longrightarrow H^1(C) \longrightarrow ...$$