Комплексные многообразия,

лекция 7

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

8 ноября 2010

dd^c-лемма

ТЕОРЕМА: Пусть η - форма на компактном кэлеровом многообразии, которая удовлетворяет какому-то из условий
1. η – точная (p,q)-форма. 2. η – d^c-точная, d-замкнутая.
3. η – ∂-точная, $\overline{\partial}$-замкнутая.
Тогда $\eta \in \operatorname{im} dd^c = \operatorname{im} \partial\overline{\partial}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Отметим сразу, что во всех трех случаях η **замкнута и ортогональна ядру Лапласа, значит, ее класс когомологий равен нулю.**

Поскольку η точна, она лежит в образе Δ. Оператор $G_\Delta := \Delta^{-1}$ определен на образе Δ (который замкнут) и коммутирует с d, d^c. Значит, $\eta' := G_\Delta(\eta)$ тоже точно. $\Delta = [\Lambda, dd^c]$ дает

$$\eta = \Delta(\eta') = [\Lambda, dd^c](\eta') = dd^c \Lambda \eta'.$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\Delta G_\Delta(\eta) = dd^* + d^* dG_\Delta(\eta) = d^* G_\Delta(d\eta) + dd^* G_\Delta(\eta) = \eta$$

для любой точной формы η. Значит, **$d^* G_\Delta$ обращает d на точных формах.**

Операции Масси

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $a, b, c \in \Lambda^*(M)$ замкнутые формы, классы когомологий которых удовлетворяют $[a][b] = [b][c] = 0$, а $\alpha, \gamma \in \Lambda^*(M)$ такие формы, что $d(\alpha) = a \wedge b$, $d(\gamma) = b \wedge c$. **Тогда $\alpha \wedge c - a \wedge \gamma$ – замкнутая форма, и ее класс когомологий определен однозначно** по модулю $\operatorname{im} L_{[a]} + \operatorname{im} L_{[c]}$ (по модулю умножения на классы $[a]$, $[c]$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Класс когомологий $\alpha \wedge c + a \wedge \gamma$ называется **произведением Масси** a, b, c.

УТВЕРЖДЕНИЕ: На кэлеровом многообразии, произведения Масси равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть a, b, c – гармонические p, q-формы, тогда ab и bc – dd^c-точные p, q-формы, значит, $\alpha := d^* G_\Delta(ab)$ и $\gamma := d^* G_\Delta(bc)$ d^c-точные. Поэтому $\mu := \alpha \wedge c - a \wedge \gamma$ – d^c-точная, d-замкнутая форма. В силу dd^c-леммы, $I(\mu)$ dd^c-точна, значит μ тоже dd^c-точна. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: $I^{-1} dd^c I = dd^c$.

Теорема Хартогса

ТЕОРЕМА: Пусть f – голоморфная функция на $\mathbb{C}^n \backslash K$, где $K \subset \mathbb{C}^n$ – компакт, а $n > 1$. **Тогда f продолжается до голоморфной функции на $\mathbb{C}^n$.**

Доказательство. Шаг 1: Продолжим f до гладкой функции $\tilde{f}$, голоморфной вне компакта $K' \subset \mathbb{C}^n$. **Тогда $\alpha := \overline{\partial}\tilde{f}$ – (0,1)-форма с компактным носителем.**

Шаг 2: Вложив $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}P^n$, представим α как (0,1)-форму с компактным носителем на $\mathbb{C}P^n$. Поскольку $H^1(\mathbb{C}P^n) = 0$, получаем $\operatorname{im}\overline{\partial} = \ker\overline{\partial}$, это дает $\alpha = \overline{\partial}\varphi$, где φ – ограниченная функция на $\mathbb{C}^n$.

Шаг 3: φ голоморфна и ограниченна на любой прямой, не пересекающей K', значит, **φ постоянна на каждой комплексной прямой, не пересекающей K'.**

Шаг 4: Поэтому $\varphi = const$ вне выпуклой оболочки $U(1) \cdot K'$. Вычтем константу, получим, что **φ – функция с компактным носителем.**

Шаг 5: $\overline{\partial}(\tilde{f} - \varphi) = \alpha - \alpha = 0$, **значит, $\tilde{f} - \varphi$ – голоморфная функция.** ■

Обобщенные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим векторное пространство, снабженное набором норм $|\cdot|_i$, $i = 0, 1, 2, ...$ и топологией, которая задана метрикой вида

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min(|x-y|_i, 1).$$

Такое пространство называется **пространством Фреше**, если эта метрика полна.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Базой топологии Фреше будут бесконечные пересечения ε-шаров** вида $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_x(\varepsilon, |\cdot|_i)$, во всех метриках $|\cdot|_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M — риманово многообразие, а

$$\nabla^i: \ C^\infty(M) \longrightarrow \Lambda^1(M)^{\otimes i}$$

– i-я степень связности. Топология C^k на пространстве $C^\infty(M)_c$ функций с компактным носителем задается нормой

$$|\varphi|_{C^k} := \sup_M \sum_{i=0}^{k} |\nabla^i \varphi|.$$

Обобщенные функции (2)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство тест-функций** – пространство функций с компактным носителем, с метрикой вида

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min(|x - y|_{C^i}, 1).$$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это пространство Фреше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Обобщенная функция** (распределение) это функционал на пространстве тест-функций, непрерывный в одной из топологий C^i.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Это то же самое, что непрерывность функционала в топологии Фреше.**

ПРИМЕР: **Дельта-функция** δ_t – функционал, ставящий φ в соответствие $\varphi(t)$, где $t \in M$ – точка. **Дельта-функция непрерывна в топологии C^0, ее производная непрерывна в C^1, и так далее.**

Потоки на многообразиях

ЗАМЕЧАНИЕ: **C^i-топологии** определяются на пространстве сечений любого расслоения, той же формулой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство тест-форм типа (p,q)** на комплексном многообразии – это пространство (p,q)-форм с компактным носителем, снабженное структурой пространства Фреше, где нормы $|\cdot|_i$ равны C^i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **(p,q)-поток** на комплексном n-мерном многообразии есть функционал на пространстве $\Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$ $(n-p,n-q)$-форм с компактным носителем, непрерывный в одной из C^i-топологий.

ЗАМЕЧАНИЕ: Потоки это (p,q)-формы с коэффициентами в обобщенных функциях.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Гладкая (p,q)-форму ψ определяет (p,q)-поток:** для любой тест-формы $\alpha \in \Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$, рассмотрим функционал $\alpha \longrightarrow \int_M \psi\wedge\alpha$. Это задает вложение $\Lambda^{p,q}(M) \hookrightarrow \mathcal{D}^{p,q}(M)$ из форм в потоки.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Потоки это пополнение $\Lambda^{p,q}(M)$ в топологии, двойственной топологии на тест-формах.**

Когомологии потоков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференцирование вдоль векторного поля непрерывно в топологии потоков, значит, **на пространстве потоков определен дифференциал де Рама,** продолженный по непрерывности из пространства форм, а также дифференциалы Дольбо ∂ и $\overline{\partial}$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Дифференциал де Рама на потоках можно определить формулой $\langle d\alpha, \tau\rangle := -(-1)^{\tilde{\alpha}}\langle\alpha, d\tau\rangle$,** где α – поток, а τ – тест-форма.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите лемму Пуанкаре для потоков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – собственный морфизм комплексных многообразий, $\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y + k$ а α – поток на X. Определим **прямой образ** $f_*\alpha$ формулой $\langle f_*\alpha, \tau\rangle := \langle\alpha, f^*\tau\rangle$ Легко видеть, что $f_*\alpha$ **имеет размерность $(p-k, q-k)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: $df_*\alpha = f_*d\alpha$, $\partial f_*\alpha = f_*\partial\alpha$, и так далее.

ЗАМЕЧАНИЕ: У потоков **не определен** обратный образ, зато определен прямой. У форм нет прямого образа, зато есть обратный.

Формула Пуанкаре-Лелонга

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Формула Пуанкаре-Лелонга) Рассмотрим поток на $\mathbb{C}$, заданный формулой $\frac{1}{\pi z}dz$. **Тогда $d\left(\frac{1}{\pi z}dz\right) = \delta_0 \operatorname{Vol}$,** где δ_0 есть δ-функция в 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **Формула Коши:** для любой функции f на диске D, і $w \in D$, имеем

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\overline{\partial} f}{z-w} \wedge dz$$

применив это к тест-функции f с компактным носителем внутри D, получим $f(w) = -\langle \frac{1}{\pi z} dz, \overline{\partial} f\rangle = \langle \overline{\partial}(\frac{1}{\pi z}) dz, f\rangle$.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ – проекции, а ξ – (2,1)-поток на $\mathbb{C}^2$, заданный формулой $\frac{1}{\pi(z-w)} dz \wedge dw \wedge d\overline{w}$. Рассмотрим **свертку с потоком ξ**, заданную формулой $P_\xi(\tau) := \pi_{2*}(\pi_1^* \tau \wedge \xi)$. Тогда $\overline{\partial} P_\xi(\alpha) = \alpha$, для любой $(0,1)$-формы α с компактным носителем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\overline{\partial} P_\xi(\alpha) = \pi_{2*}(\pi_1^* \tau \wedge \overline{\partial}\xi) = \pi_{2*}(\pi_1^*\tau \wedge \delta_\triangle) = \tau,$$

где $\delta_\triangle$ есть дельта-функция диагонали $\triangle$, определенная формулой $\langle \kappa, \delta_\triangle\rangle := \int_\triangle \kappa$. ∎