Комплексные многообразия,

лекция 2

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

20 сентября 2010

Группы Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – гладкое многообразие с заданной на нем групповой структурой. Оно называется **группой Ли**, если групповые операции (умножение $G \times G \longrightarrow G$ и взятие обратного $G \longrightarrow G$) – гладкие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Левоинвариантное векторное поле** на G есть такое векторное поле $x \in TG$, что для каждого $g \in G$, операция умножения на g слева удовлетворяет $D_g(x) = x$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **естественное отображение из пространства левоинвариантных векторных полей в T_gG – изоморфизм, для каждого $g \in G$.**

Алгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра Ли** есть пространство с заданной на нем билинейной, кососимметричной операцией $A \otimes A \longrightarrow A$, удовлетворяющей **тождеству Якоби** $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Коммутатор левоинвариантных векторных полей левоинвариантен.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра Ли** группы Ли G есть алгебра Ли ее левоинвариантных векторных полей.

ЗАМЕЧАНИЕ: Основная теорема теории групп и алгебр Ли утверждает, что **односвязная группа Ли однозначно с точностью до изоморфизма задается своей алгеброй Ли.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть G – связная группа Ли с коммутативной алгеброй Ли. Докажите, что G коммутативна.

Локальное действие группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие, а G – группа Ли. **Локальное действие G на M** есть отображение $W \xrightarrow{\mu} M$, определенное для какого-то открытого подмножества $W \subset G \times M$, и удовлетворяющее следующим аксиомам.

1. **Единица:** W содержит $e \times M$, где e – единица.

2. **Ассоциативность:** Если $(g, m) \in W$, и $(g', \varphi(g, m)) \in W$, то $(g'g, m) \in W$, и $\varphi((g', \varphi(g, m)) = \varphi(g'g, m)$.

ТЕОРЕМА: Пусть M – гладкое многообразие, $A \subset TM$ – конечномерная алгебра Ли векторных полей, а G – ее группа Ли. **Тогда существует локальное действие группы G на M,** такое, что левоинвариантные векторные поля переходят в A.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие, а $x_1, ..., x_r$ – коммутирующие векторные поля. **Тогда x_i можно локально проинтегрировать до действия потока из r коммутирующих диффеоморфизмов $\mathbb{R}^r \times M \xrightarrow{\varphi} M$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В этой лекции, из всей теории групп Ли нам понадобится только это утверждение.

Распределения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Распределение** на гладком многообразии есть гладкое подрасслоение $B \subset TM$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\Pi : TM \longrightarrow TM/B$ – проекция, а $x, y \in B$ – векторные поля. Тогда $[fx, y] = f[x, y] - D_y(f)x$. Следовательно,. **$\Pi([x, y])$ зависит от x, y $C^\infty(M)$-линейно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Построенное отображение $[B, B] \longrightarrow TM/B$ называется **форма Фробениуса** ("Frobenius bracket"); это косо-симметричная $C^\infty(M)$-линейная 2-форма на B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Распределение называется **интегрируемым**, или же **инволютивным**, если форма Фробениуса равна нулю.

Гладкие субмерсии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi: M \longrightarrow M'$ – гладкое отображение. Оно называется **субмерсией**, если в каждой точке M дифференциал $D\pi$ сюрьективен.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\pi: M \longrightarrow M'$ – гладкая субмерсия. Тогда у каждой точки $m \in M$ есть окрестность $U \cong V \times W$, где U, W – гладкие многообразия, такая, что **$\pi|_U$ есть проекция на W.**

Доказательство: Теорема о неявной функции.

УПРАЖНЕНИЕ: ("Ehresmann's fibration theorem")
Пусть $\pi: M \longrightarrow M'$ – гладкая субмерсия компактных многообразий. **Докажите, что это локально тривиальное расслоение.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Вертикальное касательное пространство** субмерсии есть ядро $D\pi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это инволютивное подрасслоение.**

Доказательство: Коммутатор перестановочен с проекцией потому что.

ЗАМЕЧАНИЕ: Вертикальное подрасслоение обозначается $T_\pi M$.

Теорема Фробениуса

Теорема Фробениуса: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение. Оно **является инволютивным тогда и только тогда**, когда у каждой точки $x \in M$ **есть окрестность U и гладкая субмерсия $U \xrightarrow{\pi} V$ такая, что B есть вертикальное касательное подрасслоение:** $B = T_\pi M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Слои π называются **листами**, или **интегральными подмногообразиями** распределения B. Если B интегрируема, совокупность всех листов (а также само B) называют **слоением**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для доказательства теоремы Фробениуса **достаточно убедиться, что через каждую точку проходит интегральное подмногообразие.** В этом случае, гладкая субмерсия $U \xrightarrow{\pi} V$ – это проекция на пространство листов слоения.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Пусть в B есть базис $b_1, ..., b_r$ линейно-независимых, коммутирующих векторных полей.** Обозначим за $\tau(t, b_i): M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ соответствующие потоки диффеоморфизмов. **Поскольку b_i коммутируют, потоки $\tau(t, b_i)$ тоже коммутируют.** Это задает локальное действие группы $\tau(t_1, ..., t_r): M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, причем для каждого $m \in M$, касательное пространство $\tau(\mathbb{R}^r, m)$ порождено $\langle b_1, ..., b_r \rangle$. **Значит, $\tau(\mathbb{R}^r, m)$ – интегральные подмногообразия.**

Теорема Фробениуса (доказательство)

СЛЕДСТВИЕ: Мы получили, что теорема Фробениуса следует из такой леммы.

ЛЕММА: Пусть $B \subset TM$ – инволютивное подрасслоение. Тогда **в окрестности каждой точки $x \in M$ есть базис из линейно-независимых, коммутирующих векторных полей.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Ведется по индукции. Предположим, что задано подрасслоение $B_0 \subset B$, порожденное коммутирующими векторными полями $b_1, ..., b_{k-1}$. Нужно найти векторное поле $b_k \in B$, линейно независимое и коммутирующее с $b_1, ..., b_{k-1}$. **Рассмотрим локальное действие группы $\beta : \mathbb{R}^{k-1} \times M \longrightarrow M$. и пусть $\pi : U \longrightarrow V$ – субмерсия на пространство листов.** Возьмем ее **сечение** $V \xrightarrow{\rho} U$, то есть такое отображение, что $\pi \circ \rho = \mathrm{Id}_V$ (**локально такое сечение всегда существует,** по теореме о неявной функции).

Шаг 0: Образ ρ – гладкое подмногообразие в U.

Теорема Фробениуса (продолжение)

Шаг 1: Отображение $\beta(\mathbb{R}^{k-1} \times \operatorname{im}\rho) \longrightarrow U$ – изоморфизм (локально), потому что

$$D\beta: \ \langle b_1, ..., b_{k-1}\rangle \oplus T \operatorname{im}\rho \longrightarrow TU$$

изоморфизм.

Шаг 2: Для каждого векторного поля v на $\operatorname{im}\rho$, действие β разносит v на U, **превращая его в β-инвариантное векторное поле.**

Шаг 3: Подрасслоение $B \subset TU$ является β-инвариантным, ибо $[b_i, B] \subset B$.

Шаг 4: Возьмем невырожденное векторное поле $v \in B \cap T \operatorname{im}\rho$ (локально, оно существует, потому что $\operatorname{codim}\operatorname{im}\rho = k-1 < \dim B = r$, значит, $\dim(T \operatorname{im}\rho \cap B) \geqslant \dim B - \operatorname{codim}\operatorname{im}\rho = r-k+1$). Продолжим его до β-инвариантного векторного поля b_k на U (шаг 3). **Будучи β-инвариантным, β_k коммутирует с $b_1, ..., b_{k-1}$, а в силу шага 4, оно лежит в B.** ■

Вещественно аналитические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Антиголоморфная функция** есть функция f такая, что $\overline{f}$ голоморфна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Антикомплексной инволюцией** на комплексном многообразии называется непрерывная инволюция ι, $\iota^2 = \mathrm{Id}$, переводящая голоморфные функции на $U \subset M$ в антиголоморфные на $\iota(U)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что множество неподвижных точек X_ι антикомплексной инволюции – **гладкое многообразие, причем $\dim_{\mathbb{R}} X_\iota = \dim_{\mathbb{C}} X$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Y \subset X$ – замкнутое множество в комплексном многообразии, и $X' \supset Y'$ многообразие, которое содержит замкнутое множество, гомеоморфное Y. Если гомеоморфизм $Y \longrightarrow Y'$ продолжается до голоморфного диффеоморфизма их окрестностей, мы пишем $X \sim_Y X'$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это отношение эквивалентности.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Ростком** X в Y называется класс эквивалентности X относительно $\sim_Y$.

Вещественно аналитические многообразия (2)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция на открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$ называется **вещественно-аналитической**, если она разлагается в ряд Тэйлора в окрестности каждой точки.

Определение 1: Пусть задано комплексное многообразие, снабженное антикомплексной инволюцией, и X_ι – ее неподвижное множество. Тогда росток X в X_ι называется **вещественно-аналитическое многообразие**.

Определение 2: Пусть M – окольцованное пространство, локально изоморфное $(B, \mathcal{O}_B)$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ – открытый шар, а $\mathcal{O}_B$ – пучок вещественно-аналитических функций. Тогда M называется **вещественно-аналитическое многообразие**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Вещественно-аналитические тензоры на X_ι продолжаются до голоморфных, ι-инвариантных тензоров в какой-то окрестности $X_\iota \subset X$.

Вещественно аналитические многообразия (3)

ТЕОРЕМА: Эти определения эквивалентны.

(1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $U_\iota \subset X_\iota$ – открытое множество. Возьмем в качестве $\mathcal{O}_{X_\iota}$ пучок, порожденный f_i, где f_i – ι-инвариантные голоморфные функции в открытом множестве $U \supset U_\iota$. Каждая такая функция – вещественно-аналитична в U, значит, **ее ограничение на открытые вещественные шары, содержащиеся в U_ι, тоже вещественно-аналитично.**

(2) $\Rightarrow$ (1) (набросок): Возьмем покрытие M открытыми шарами $B_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$, такое, что все функции перехода φ_{ij} вещественно-аналитичны. Вещественно-аналитическая функция φ_{ij} на $B_{\mathbb{R}}$ продолжается до голоморфной $\varphi_{ij}^{\mathbb{C}}$ в некоторой окрестности $B_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$. Пусть и пусть X^i - такие окрестности этих шаров в $\mathbb{C}^n$. **Они задают атлас на многообразии, полученном из X^i склейкой по $\varphi_{ij}^{\mathbb{C}}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы не используем этой эквивалентности (используем аналогичное локальное утверждение, которое очевидно).

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите ее самостоятельно.

Тензор Ниенхойса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, $T^{1,0} \subset TM \otimes \mathbb{C}$ – подрасслоение векторов типа $(1,0)$, а $[T^{1,0}, T^{1,0}] \xrightarrow{N} TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ – скобка Фробениуса. Отождествив $TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ с $T^{0,1}$, мы представим N как оператор

$$N: \Lambda^2(T^{1,0}M) \longrightarrow T^{0,1}M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Этот оператор называется **тензором Ниейхойса** (Nijenhuis tensor). Его можно преставить как сечение $N \in \Lambda^{2,0}M \otimes T^{0,1}M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Тензор Ниенхойса вещественно-аналитического многообразия тоже вещественно-аналитичен.

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Ньюлендера-Ниренберга выводит интегрируемость из $N = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим вещественную часть $\operatorname{Re} N$ как оператор

$$\frac{1}{2}(N + \overline{N}): \Lambda^2 TM \longrightarrow TM.$$

Из $\operatorname{Re} N = 0$ **следует** $N = 0$ (проверьте).

Теорема Ньюлендера-Ниренберга

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – вещественно-аналитическое почти комплексное многообразие, причем $[T^{1,0}, T^{1,0}] \subset T^{1,0}$. **Тогда почти комплексная структура I интегрируема.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку утверждение локально по M, **можно считать, что для M верны оба определения вещественно-аналитических многообразий.** Пусть $M = B_{\mathbb{R}}$ – вещественный шар, а $X = B_{\mathbb{C}}$ – комплексный шар, снабженный антикомплексной инволюцией, причем $M = X_\iota$.

Шаг 1: Пусть

$$\Pi^{1,0} : |_M = TM \otimes \mathbb{C} \longrightarrow T^{1,0}M \subset TX|_M$$

– естественная проекция вдоль $T^{0,1}$. Продолжим $\Pi^{1,0}$ до голоморфного тензора на X (если не продолжается, заменим M и X на меньшую окрестность). Сделаем то же самое с $\Pi^{1,0}$. **Получим разложение $TX|_M = \operatorname{im}\Pi^{1,0} \oplus \operatorname{im}\Pi^{0,1}$.** Обозначим $T^{1,0}X := \operatorname{im}\Pi^{1,0}$, $T^{0,1}X := \operatorname{im}\Pi^{0,1}$.

Теорема Ньюлендера-Ниренберга (2)

Шаг 2: Перейдя к меньшей окрестности, если нужно, можно считать, что **разложение $TX = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$ определено на всем X и голоморфно.**

Шаг 3: Пусть α – голоморфный, ι-инвариантный тензор на X, который зануляется в $M = X_\iota$. **Тогда $\alpha = 0$** (чтобы убедиться, разложим в ряд Тэйлора).

Шаг 4: Тензор Фробениуса для $T^{1,0}X$, ограниченный на $M = X_\iota$, дает тензор Ниенхойса. Его вещественная часть есть сумма тензоров Фробениуса для $T^{1,0}X$ и $T^{0,1}X$. **Поэтому $T^{1,0}X$ и $T^{0,1}X$ интегрируемы.**

Шаг 5: По теореме Фробениуса, локально по X **существует голоморфная субмерсия $\pi: X \longrightarrow X^{1,0}$, со слоями, касательными $T^{0,1}X$.**

Шаг 6: Пусть f – голоморфная функция на $X^{1,0}$. Тогда $D_x(\pi^* f) = 0$ для любого $x \in T^{0,1}X$. **Поэтому $d(\pi^* f)$ имеет тип $(1,0)$.**

Шаг 7: Мы получили, что **ограничение π на $M \subset X^{1,0}$ голоморфно (потому что $\pi^* f$ от голоморфной функции f голоморфен)**. Ядро дифференциала этого отображения лежит в $TM \cap T^{0,1}X = 0$. По теореме об обратной функции, $\pi|_M : M \longrightarrow X^{1,0}$ – **диффеоморфизм.** ■