Комплексные числа, Кватернионы, Октавы,...

Пусть K — множество с операциями сложения и умножения, а также сопряжением. Введём $K^{(2)}$ как множество пар элементов K с такими же операциями, определёнными следующим образом:

$$(a,b)+(u,v)=(a+u,\, b+v) \qquad (a,b)\cdot(u,v)=(au-\overline{v}b,\, b\overline{u}+va) \qquad \overline{(a,b)}=(\overline{a},-b).$$

Задача 1. Какие из аксиом поля для $K^{(2)}$ *непосредственно* следуют из соответствующих аксиом для K?

Начнём с действительных чисел $\mathbb{R}$ (с тождественным сопряжением). Тогда $\mathbb{C}=\mathbb{R}^{(2)}$ известны как *комплексные числа*, $\mathbb{H}=\mathbb{C}^{(2)}$ — как *кватернионы*, $\mathbb{O}=\mathbb{H}^{(2)}$ — как *октавы* или *октанионы*, и, наконец, $\mathbb{S}=\mathbb{O}^{(2)}$ как *седенионы*.

Заметим, что K вкладывается в $K^{(2)}$ так: $a\to(a,0)$. Таким образом, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\subset\mathbb{H}\subset\mathbb{O}\subset\mathbb{S}$. Введём обозначения

$$i=(0,1)\in\mathbb{C},\quad j=(0,1)\in\mathbb{H},\quad k=(0,i)\in\mathbb{H},$$

$$e=(0,1)\in\mathbb{O},\quad f=(0,i)\in\mathbb{O},\quad g=(0,j)\in\mathbb{O},\quad h=(0,k)\in\mathbb{O}.$$

Задача 2. Составьте таблицу умножения для этих элементов.

Задача 3. Докажите, что умножение в $\mathbb{C}$ — коммутативно, а в $\mathbb{H}$ (и, тем самым, $\mathbb{O}$ и $\mathbb{S}$) — нет.

Задача 4. a) Докажите, что умножение в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$ — ассоциативно, а в $\mathbb{O}$ (и, тем самым, $\mathbb{S}$) — нет. Что используется в доказательстве ассоциативности?

b) Докажите, что тем не менее умножение в $\mathbb{O}$ — *альтернативно*, то есть $a(ab)=(aa)b$, $a(bb)=(ab)b$.

c^*) Альтернативно ли умножение в $\mathbb{S}$?

Задача 5. Пусть $\|a\|=a\overline{a}$.

a) Напишите “в координатах” формулу для $\|a\|$, где $a\in\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$.

b) Докажите, что для $a\in\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$ выполняется $\|a\|\in\mathbb{R}$, $\|a\|\geqslant 0$, и при этом $\|a\|=0$ равносильно $a=0$.

c) Верно ли это для $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}^{(2)},\ldots$?

d) Напишите формулу для $a^{-1}\in\mathbb{O}$, так чтобы $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ (разумеется, $a\neq 0$).

Задача 6. a) Докажите, что $\|ab\|=\|a\|\cdot\|b\|$ в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$.

b^*) Докажите, что $\|ab\|=\|a\|\cdot\|b\|$ в $\mathbb{O}$.

c^*) Выведите отсюда, что для всяких $a\neq 0, b\in\mathbb{O}$ уравнение $ax=b$ имеет ровно одно решение.

d^*) Верны ли эти утверждения для $\mathbb{S}$?

Задача 7*. a^*) Докажите, что в любом коммутативном кольце всякое призведение двух сумм двух/четырёх/восьми квадратов само является суммой двух/четырёх/восьми квадратов соответственно.

b^*) Верно ли это для трёх квадратов?

Задача 8*. a^*) Докажите, что в $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ нет делителей нуля.

b^*) Приведите пример делителей нуля в $\mathbb{S}$.

Задача 9*. Пусть $K=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ с тривиальным сопряжением.

a^*) При каких p кольцо $K^{(2)}$ будет полем?

b^*) При каких p будет деление в кольце $\left(K^{(2)}\right)^{(2)}$?